УДК 519.6

С. М. Левицька;
А. І. Кардаш, канд. фіз-мат. наук, доц.;
А. Т. Дудикевич, канд. фіз-мат. наук, доц.

ПАРАЛЕЛЬНА ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА МЕТОДОМ АДАМСА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

Досліджено можливість розпаралелення різницевого методу Адамса для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Побудовано систолічну структуру — однорідне обчислювальне середовище.

Вступ

В наш час коло завдань, які вимагають для свого розв'язування потужних обчислювальних ресурсів, постійно розширюється. Це пов'язано з тим, що відбулися фундаментальні зміни в самій організації наукових досліджень. Внаслідок широкого впровадження обчислювальної техніки значно посилюється напрям чисельного моделювання та чисельного експерименту. Чисельне моделювання заняло проміжок між фізичними експериментами і аналітичними підходами. Воно дозволило вивчати явища, які для дослідження аналітичними методами є або надто складними, або занадто вартісними, або недоступними для експериментального дослідження. Чисельний експеримент дозволив значно здешевити процес наукового і технологічного пошуку. Внаслідок цього виникає можливість моделювати в реальному часі різні задачі математичної фізики. Розв'язування таких масштабних задач вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Дієвими методами підвищення ефективності моделювальних програм для мінімізації часових затрат є побудова алгоритмів чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, а також розпаралелення їх на багатопроцесорній обчислювальній системі. Значною мірою актуальність використання методу розпаралелення зумовлена сучасною тенденцією побудови паралельних обчислювальних комплексів.

Паралельні обчислювальні системи — це фізичні комп'ютери, чіпи, процесори, а також програмні системи, що реалізують тим чи іншим способом паралельну обробку обчислень.

Ідея розпаралелення обчислень полягає в тому, що велике завдання поділяється на набір менших завдань, які можуть бути реалізовані одночасно. Зазвичай, паралельні обчислення вимагають координації обчислень [1]. Паралельні обчислення стали домінуючою парадигмою в архітектурі сучасних комп'ютерів, в основному у формі багатоядерних процесорів.

Для розпаралелення обчислень в реальному часі найефективнішими виявилися спеціалізовані однорідні обчислювальні системи — систолічні масиви [2]. Загальний підхід до побудови систолічних масивів базується на такій ідеї. Нехай маємо необхідну кількість функціональних пристроїв, які реалізують операції одного або декількох типів. Функціональні пристрої називаємо систолічними комірками (процесорними елементами, елементарними процесорами). Кожна комірка конструктивно виконана у вигляді плоского багатокутника — трикутника, чотирикутника чи шестикутника. Входи і виходи функціональних пристроїв виведені на його межу. З цих багатокутників складаємо різні фігури, щільно заповнюючи площину так, щоб сусідні багатокутники межували один з одним. В місцях дотику знаходяться входи і виходи функціональних пристроїв. При цьому отримаємо найбільш просту і ефективну комунікаційну мережу без комутаторів, тобто без часових витрат на пересилання інформації.

Постановка завдання

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad x \in [x_0, x_0 + a],\ a > 0; \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

де $f(x, y)$ — неперервна в області зміни аргументу і задовольняє умову Ліпшиця по y:

$$\left|f\left(x, y_2\right)-f\left(x, y_1\right)\right| \leq K\left|y_2-y_1\right|, \quad K=\text{const} \tag{3}$$

і, крім того,

$$\left|\frac{df(x, y)}{dx}\right|=\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leq N, \quad N=\text{const}. \tag{4}$$

Серед наближених методів розв'язування задачі Коші найточнішими є різницеві методи [3]. Для їх застосування потрібно, крім умови (2), знати значення шуканого розв'язку в декількох додаткових точках $x_k=x_0+kh, \ \left(k=\overline{1, p}\right)$, які знаходимо, наприклад, методом Рунге-Кутта.

На проміжку $[x_n, x_{n+1}]$ записуємо рівняння (1) в інтегральному вигляді

$$y\left(x_{n+1}\right)=y\left(x_n\right)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y(x)\right) dx, \ n=p, p+1, \ldots .$$

Наближені значення шуканої функції знаходимо за формулою

$$y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx,$$

де $P(x)$ — поліном p-го степеня, який в $p+1$ точках збігається з відповідними значеннями $f\left(x_k, y_k\right)=f_k \ (k=0, 1, \ldots, p)$.

Якщо за багаточлен $P(x)$ взяти поліном Ньютона інтерполювання назад, то маємо таку рекурентну формулу:

$$y_{n+1}=y_n+h \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \Delta^k f_{n-k}, \ n=p, p+1, \ldots, \tag{5}$$

де $\alpha_0=1, \ \alpha_k=\frac{1}{k!} \int_0^1 t(t+1)(t+2) \ldots(t+k-1) dt, \ k=\overline{0, p}.$

Це є екстраполяційний метод Адамса. Наприклад, для $p=3$ отримаємо найбільш вживану розрахункову формулу цього методу

$$y_{n+1}=y_n+h\left(f_n+\frac{1}{2} \Delta f_{n-1}+\frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2}+\frac{3}{8} \Delta^3 f_{n-3}\right), \tag{6}$$

де Δf_{n-1}; $\Delta^2 f_{n-2}$; $\Delta^3 f_{n-3}$ — скінченні різниці першого, другого та третього порядків, відповідно.

Якщо $p=5$, формула Адамса (5) має вигляд

$$y_{n+1}=y_n+h\left(f_n+\frac{1}{2} \Delta f_{n-1}+\frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2}+\frac{3}{8} \Delta^3 f_{n-3}+\frac{251}{720} \Delta^4 f_{n-4}+\frac{95}{288} \Delta^5 f_{n-5}\right). \tag{7}$$

Для похибки $\varepsilon_n=y_n-y\left(x_n\right)$, використовуючи умову Ліпшиця (3), отримаємо таку рекурентну оцінку:

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| \leq\left|\varepsilon_n\right|+h K \sum_{k=0}^{p}\left|\alpha_k^*\right|\left|\varepsilon_{n-k}\right|+c,$$

де c — деяка константа.

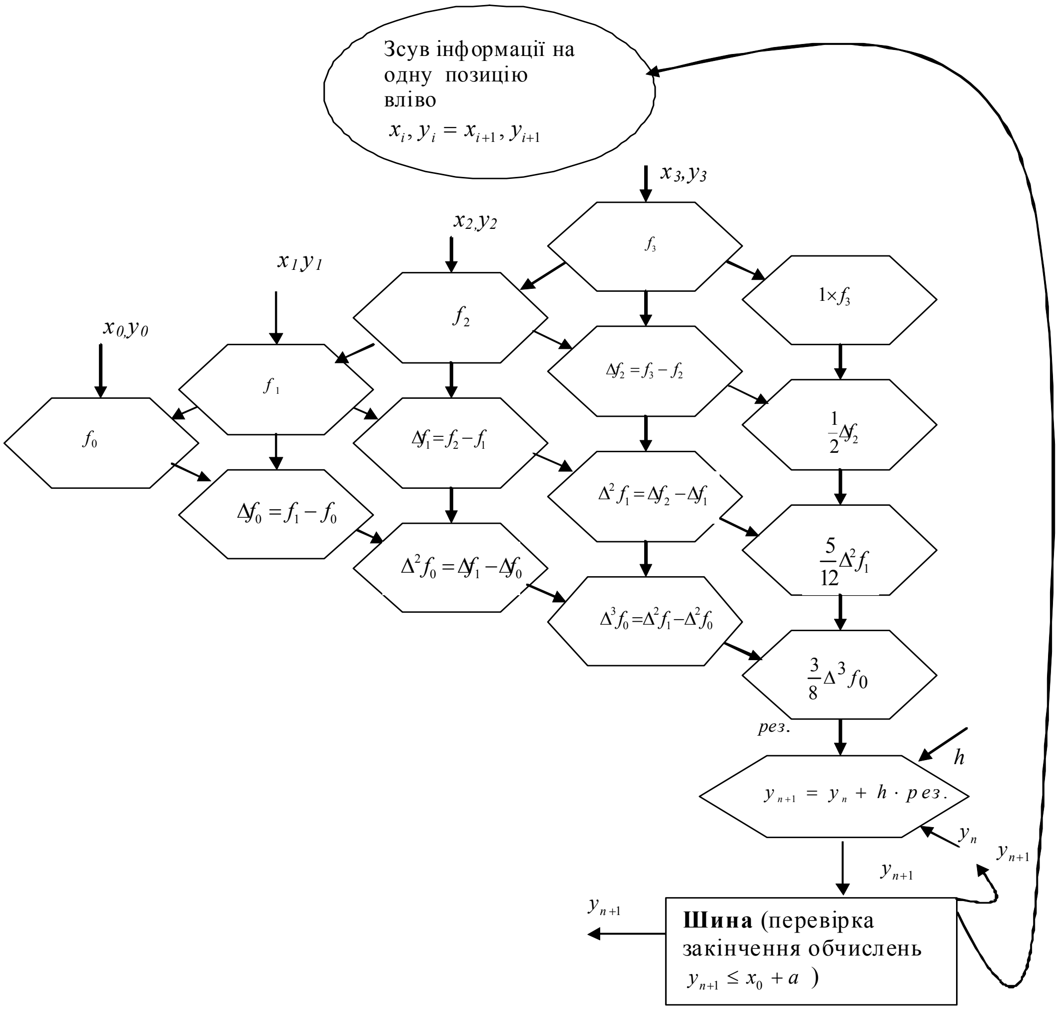
Для грубої оцінки похибки методу часто використовують принцип Рунге в такому вигляді

$$\left|y_{2n}-y\left(x_{2n}\right)\right| \approx \frac{\left|y_{2n}-y_n\right|}{2^p-1}, \tag{8}$$

де p — порядок точності методу.

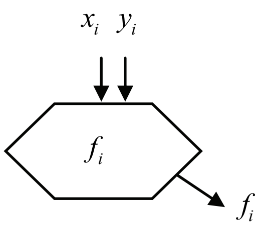
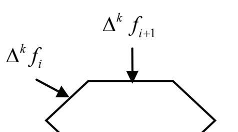
Побудова систолічного масиву

Для побудови масиву (рис.) використано шестикутні комірки 4-х типів, показані у таблиці.

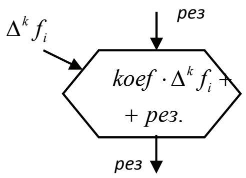
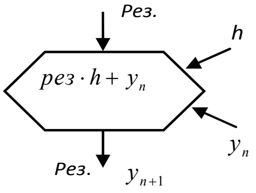


Систолічний масив розпаралеленого методу Адамса

Операції систолічного масиву

Схема комірки	Зміст операції
	Обчислення значення функції в точці (x_i, y_i)
	Операція обчислення скінченної різниці $\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$

Продовження табл.

Схема комірки	Зміст операції
	*Koef*-коефіцієнти містяться в локальній пам'яті відповідної комірки $koef = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{12}, \ldots$
	Остання комірка систолічного масиву для отримання остаточного значення розв'язку в наступній точці x_{i+1}

Результат останньої комірки подається на шину, до вхідних значень аргументів x_i додається h, тобто всі вони зсуваються на одну позицію вліво, і на крайню праву комірку по шині надходить y_{n+1}. Крім того, y_{n+1} розглядається як вихідна інформація. Процес продовжується допоки не буде досягнуто кінця проміжку $[x_0, x_0 + a]$.

Висновки

В роботі запропонована схема однорідного обчислювального середовища (спеціалізованої багатопроцесорної обчислювальної машини) для знаходження розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку за багатокроковим методом Адамса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1986.
2. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики / [А. Н. Химич, И. Н. Молчанов, А. В. Попов и др.]. — К. : Наукова думка, 2008.
3. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Цегелик. — Львів : Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Стаття надійшла до редакції 20.03.2013
Рекомендована до друку 4.04.2013

Левицька Софія Михайлівна — старший викладач, ***Кардаш Андрій Іванович*** — доцент.

Кафедра програмування;

Дудикевич Анна Теодорівна — доцент кафедра обчислювальної математики.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів