УДК 517.518.949

А. Т. Дудикевич, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
А. І. Кардаш, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
С. М. Левицька

ПОБУДОВА АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В СФЕРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Гранична задача Діріхле для рівняння Пуассона у випадку сферичної системи координат розв'язується методом скінченних різниць. Побудовано різницеву схему та алгоритм її реалізації.

Вступ

Багато процесів різної фізичної природи приводять до диференціальних рівнянь еліптичного типу. Достатньо вказати стаціонарні задачі теплопровідності і дифузії, задачі електростатики і магнітостатики, задачі теорії пружності, теорії фільтрації та інші.

Метод скінченних різниць є найпоширенішим та універсальним засобом наближеного розв'язування складних крайових задач для еліптичних рівнянь. Це пов'язано з великою гнучкістю методу сіток, який легко витримує такі ускладнені завдання, які призводять до значних труднощів у разі використання класичних наближених методів. Однак порівняно з ними метод сіток вимагає значно більшого числа простих і одноманітних арифметичних операцій. Труднощі, які при цьому виникають, долаються як підвищенням швидкодії сучасних комп'ютерів, так і вдосконаленням обчислювальних алгоритмів.

Для вдалої реалізації методу потрібно здійснити три кроки [1]:

— замінити область неперервної зміни аргументів областю дискретної його зміни;

— замінити диференціальний оператор деяким різницевим співвідношенням та сформулювати різницевий аналог для крайових і початкових умов;

— розв'язати систему сіткових рівнянь.

Варто також зауважити, що різницеві апроксимації еліптичних рівнянь можуть бути використані під час побудови різницевих схем для нестаціонарних задач математичної фізики, зв'язаних з рівняннями параболічного та гіперболічного типів.

Постановка задачі

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона: знайти неперервну в $G+\Gamma$ функцію $u(x)$, яка задовольняє рівняння

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x); \qquad x \in G, \tag{1}$$

і граничну умову

$$u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \tag{2}$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$; G — тривимірна скінченна область з границею Γ; $f(x)$ та $\mu(x)$ — задані неперервні функції.

Для знаходження розв'язку в кулі, кільці, кульовому секторі тощо доцільно рівняння (1) розглядати в сферичній системі координат [2]:

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r, \varphi, \theta), \tag{3}$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; $\theta = \arccos\frac{x_3}{r}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1}$; $0 \le r < \infty$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \theta \le \pi$, який задовольняє:

© А. Т. Дудикевич, А. І. Кардаш, С. М. Левицька, 2013

граничну умову $$u(r, \varphi, \theta) = \mu(\varphi, \theta), \text{ якщо } r = R, \tag{4}$$
умову обмеженості

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \text{ якщо } r = 0; \quad \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \text{ якщо } \theta = 0, \pi, \tag{5}$$

а також умову періодичності по φ

$$u\left(r, \varphi, \theta\right) = u\left(r, \varphi + 2\pi, \theta\right), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{6}$$

Введемо деякі позначення:

$$L_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right); \quad L_\varphi u = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; \quad L_\theta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{7}$$

$$L_r u + L_\varphi u + L_\theta u = -f(r, \varphi, \theta). \tag{8}$$

Побудова різницевої схеми

На основі інтегрального закону збереження енергії (метод балансу) [3] побудуємо різницеву схему для тривимірного еліптичного рівняння (8). Введемо різницеву сітку з кроками $h_r,\ h_\varphi,\ h_\theta$:

$$\Omega = \omega_r \cdot \omega_\varphi \cdot \omega_\theta = \left\{(r_i, \varphi_j, \theta_k),\ r_i \in \omega_r,\ \varphi_j \in \omega_\varphi,\ \theta_k \in \omega_\theta\right\}. \tag{9}$$

причому

$$\omega_\varphi = \left\{\varphi_j = jh_\varphi;\ j = 0, ..., J-1;\ h_\varphi = \frac{2\pi}{J}\right\};\ \omega_r = \left\{r_i = (i+1)h_r;\ i = 0, 1, 2, ...I-1;\ h_r = \frac{R}{I}\right\};$$

$$\omega_\theta = \left\{\theta_k = (k+0,5)h_\theta;\ k = 0, ..., K-1;\ h_\theta = \frac{\pi}{K}\right\}.$$

В подальшому будемо використовувати такі позначення:

$$I^{(1)}\left(r, \varphi, \theta\right) = r^2 \frac{\partial u}{\partial r}; \quad I^{(2)}\left(r, \varphi, \theta\right) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \quad I^{(3)}\left(r, \varphi, \theta\right) = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{10}$$

Проінтегруємо рівняння (8) в області

$$\Delta_s = \left\{r_{i-1/2} \le r_i \le r_{i+1/2},\ \varphi_{j-1/2} \le \varphi_j \le \varphi_{j+1/2},\ \theta_{k-1/2} \le \theta_k \le \theta_{k+1/2}\right\}.$$

Отримаємо рівняння балансу

$$\frac{1}{r_i^2} \int\limits_{\varphi_{j-\frac{1}{2}}}^{\varphi_{j+1/2}} \int\limits_{\theta_{k-\frac{1}{2}}}^{\theta_{k+\frac{1}{2}}} \left[I^{(1)}_{i+1/2}(\varphi, \theta) - I^{(1)}_{i-1/2}(\varphi, \theta)\right] d\varphi d\theta + \frac{1}{r_i^2 \sin^2\theta_k} \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+1/2}} \int\limits_{\theta_{k-\frac{1}{2}}}^{\theta_{k+\frac{1}{2}}} \left[I^{(2)}_{j+1/2}(r, \theta) - I^{(2)}_{j-1/2}(r, \theta)\right] dr\, d\theta +$$
$$+ \frac{1}{r_i^2 \sin\theta_k} \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+1/2}} \int\limits_{\varphi_{j-\frac{1}{2}}}^{\varphi_{j+\frac{1}{2}}} \left[I^{(3)}_{k+1/2}(r, \varphi) - I^{(3)}_{k-1/2}(r, \varphi)\right] dr d\varphi = -\int_{\Delta_s} f\left(r, \varphi, \theta\right) dr\, d\varphi\, d\theta. \tag{11}$$

Для побудови різницевої схеми виразимо в тотожності (11) значення $I^{(1)}_{i\pm 1/2}(\varphi, \theta)$, $I^{(2)}_{j\pm 1/2}(r, \theta)$ та $I^{(3)}_{k\pm 1/2}(r, \varphi)$ через розв'язок рівняння та коефіцієнти, використовуючи найпростіші інтерполяційні формули.

Проінтегруємо співвідношення $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2} I^{(1)}(r, \varphi, \theta)$; $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = I^{(2)}(r, \varphi, \theta)$; $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin\theta} I^{(3)}(r, \varphi, \theta)$ на відрізках $\left[r_i, r_{i+1}\right]$; $\left[\varphi_j, \varphi_{j+1}\right]$; $\left[\theta_k, \theta_{k+1}\right]$. Після нескладних перетворень отримаємо різницеве рівняння для внутрішнього вузла $\left(r_i, \varphi_j, \theta_k\right)$

$$\frac{1}{r_i^2}\frac{1}{h_r}\left(r_{i+1}r_i\cdot u_r\left(\varphi_j,\theta_k\right)-r_{i-1}r_i\cdot u_{\bar r}\left(\varphi_j,\theta_k\right)\right)+\frac{1}{r_i^2\sin^2\theta_k}\frac{1}{h_\varphi}\left(u_\varphi-u_{\bar\varphi}\right)+$$
$$+\frac{1}{r_i^2\sin\theta_k}\frac{1}{h_\theta}\left(\sin\theta_{k+\frac{1}{2}}u_\theta-\sin\theta_{k-\frac{1}{2}}u_{\bar\theta}\right)=-F\left(r,\varphi,\theta\right),\tag{12}$$

де $F\left(r,\varphi,\theta\right)=\dfrac{1}{h_r h_\varphi h_\theta}\int_{\Delta_s}f\left(r,\varphi,\theta\right)drd\varphi d\theta.$

Оператор L_φ апроксимуємо таким чином:

$$\Lambda_\varphi v=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_{\bar\varphi\varphi}\approx L_\varphi v=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.\tag{13}$$

Оператор L_r як оператор зі змінними коефіцієнтами можна апроксимувати за методом балансу

$$\Lambda_r v=\frac{1}{r^2}\left(\rho v_{\bar r}\right)_r\approx L_r v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right),\tag{14}$$

де $\rho=\rho(r)=rr^{-1_r}=r\left(r-h_r\right),\ r\ge h_r.$

Враховуючи, що $\rho(h_r)=0$, співвідношення (14) для $r=h_r$ матиме вигляд

$$\Lambda_r v=\frac{1}{r^2h_r}\rho^{+1_r}v_r;\quad \rho^{-1_r}=r\left(r+h_r\right)=2h_r^2.\tag{15}$$

Будемо формально вважати представлення (15) апроксимацією оператора $L_r v$ для $r\ne h_r$.

Оператор L_θ є також оператором зі змінними коефіцієнтами і застосування методу балансу, якщо $\theta\ne 0,5h_\theta$ і $\theta\ne\pi-0,5h_\theta$, приводить до оператора Λ_θ, який апроксимує оператор L_θ:

$$\Lambda_\theta v=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\bar\theta v_{\bar\theta}\right)_\theta\approx L_\theta v=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),\tag{16}$$

де $\bar\theta=\bar\theta_k-0,5h_\theta=kh_\theta.$

Враховуючи, що $\bar\theta=0$ для $\theta=0,5h_\theta$ $(k=0)$; $\bar\theta^{+1}=\left(\theta-0,5h_\theta\right)+h_\theta=\pi$ для $\theta=0,5h_\theta$ і $\theta=\pi-0,5h_\theta$:

$$\Lambda_\theta v=\frac{\sin\bar\theta^{+1}}{h_\theta r^2\sin\theta}v_\theta,\ \text{якщо}\ \theta=0,5h_\theta\ \left(\bar\theta^{+1}=h_\theta\right);\quad \Lambda_\theta v=-\frac{\sin\bar\theta}{h_\theta r^2\sin\theta}v_{\bar\theta},\ \text{якщо}\ \theta=\pi-0,5h_\theta\ \left(\bar\theta=\pi-h_\theta\right).$$

Ці співвідношення будемо вважати різницевою апроксимацією оператора L_θ для $\theta=0,5h_\theta$ і $\theta=\pi-0,5h_\theta$, тобто будемо користуватись формулою (16) у всіх вузлах сітки.

Таким чином, ми отримали таку різницеву апроксимацію на сітці (9) рівняння $\Lambda_r v+\Lambda_\varphi v+\Lambda_\theta v=-f(r,\varphi,\theta),\ (r,\varphi,\theta)\in\Omega,$ де оператори $\Lambda_r,\Lambda_\varphi,\Lambda_\theta$ визначаються за формулами (14) і (15), (13), (16).

Внаслідок цього задачі (3) ставимо у відповідність різницеву задачу Діріхле: знайти сіткову функцію $y\left(r_i,\varphi_j,\theta_k\right),$ визначену на $\bar\omega$, яка задовольняє у внутрішніх вузлах (на ω) рівняння

$$\Lambda y=\frac{1}{h_r^2}\left(\frac{r_i+h_r}{r_i}y_{i+1,j,k}-2y_{i,j,k}+\frac{r_i-h_r}{r_i}y_{i-1,j,k}\right)+\frac{1}{r_i^2h_\varphi^2\sin^2\theta_k}\left(y_{i,j+1,k}-2y_{i,j,k}+y_{i,j-1,k}\right)+\tag{17}$$

$$+\frac{1}{r_i^2h_\theta^2\sin\theta_k}\left(\sin\left((k+1)h_\theta\right)y_{i,j,k+1}-\left(\sin\left((k+1)h_\theta\right)+\sin\left(kh_\theta\right)\right)y_{i,l,k}+\sin(kh_\theta)y_{i,j,k-1}\right),\ x=\left(r_i,\varphi_j,\theta_k\right)\in\bar\omega,$$

та набуває на межі γ задані значення

$$y(r,\varphi,\theta)=\mu(\varphi_j,\theta_k)\ ,\ \text{якщо}\ r=R,\tag{18}$$

а також задовольняє умову періодичності

$$y(r,\varphi_0,\theta)=y(r,\varphi_J,\theta). \tag{19}$$

Ітераційні процеси

Для розв'язування систем різницевих рівнянь розроблено спеціальні методи, які враховують специфіку задачі, згідно з [4]. Наведемо формули найефективнішого ітераційного методу верхньої релаксації за лініями

$$p_2\tilde{y}_{i-1,j,k}^{(n+1)}-p_0\tilde{y}_{i,j,k}^{(n+1)}+p_4\tilde{y}_{i+1,j,k}^{(n+1)}=-f_{i,j,k}-p_1\left(y_{i,j-1,k}^{(n+1)}-y_{i,j+1,k}^{(n)}\right)-p_3y_{i,j,k-1}^{(n+1)}-p_5y_{i,j,k+1}^{(n)}=F_{i,j,k}^{(n)}; \tag{20}$$

$$y_{i,j,k}^{(n+1)}=\omega_t\tilde{y}_{i,j,k}^{(n+1)}+\left(1-\omega_t\right)y_{i,j,k}^{(n)}, \tag{21}$$

де $p_1=\dfrac{1}{r_i^2h_\varphi^2\sin^2\theta_k}$; $p_2=\dfrac{r_i-h_r}{h_r^2r_i}$; $p_3=\dfrac{\sin(kh_\theta)}{r_i^2h_\theta^2\sin\theta_k}$; $p_4=\dfrac{r_i+h_r}{h_r^2r_i}$; $p_5=\dfrac{\sin\left((k+1)h_\theta\right)}{r_i^2h_\theta^2\sin\theta_k}$;

$p_0=\dfrac{2}{h_r^2}+\dfrac{2}{r_i^2h_\varphi^2\sin^2\theta_k}+\dfrac{\sin\left((k+1)h_\theta\right)+\sin(kh_\theta)}{r_i^2h_\theta^2\sin\theta_k}$; ω_t — оптимальний параметр верхньої релаксації, який визначають за формулою

$$\omega_{t+1}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{\left(\lambda_1^{(t)}+\omega_t-1\right)^2}{\lambda_1^{(t)}\omega_t^2}}},\quad t=0,1,..., \tag{22}$$

де $\lambda_1^{(t)}$ — максимальне за модулем власне число матриці системи (20); ω_0 — задана величина.

Доведено, що процес обчислень параметра ω_{t+1} за формулою (22), коли для кожного обчисленого ω_t відшукують $\lambda_1^{(t)}$, потім ω_{t+1} і так далі, є розбіжним, якщо $\omega_0=1$. Надалі використовуватимемо частковий випадок цього алгоритму, тобто, прийнявши $\omega_0=1$ і $\lambda_1=\lambda_1^{(0)}$, обчислюємо ω_1, з яким виконуватимемо ітерації до закінчення ітераційного процесу.

У цьому випадку за власне число λ_1 візьмемо величину $\lambda_1^{(N_1)}$, де N_1 — мінімальне ціле число, для якого і виконується умова

$$\left|\frac{\lambda_1^{(N_1)}}{\lambda_1^{(N_1-1)}}-1\right|\le\varepsilon_1, \tag{23}$$

де ε_1 — задане мале число;

$$\lambda_1^{(s)}=\left(\sum_{i,j,k}\left(u_{i,j,k}^{(s+1)}-u_{i,j,k}^{(s)}\right)^2\Big/\sum_{i,j,k}\left(u_{i,j,k}^{(s)}-u_{i,j,k}^{(s-1)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Для кожного j, k систему (20) розв'яжемо за методом прогонки:

$$r_{i,j,k}=\frac{p_4}{p_0-p_2r_{i-1,j,k}},\quad i=1,2,...,I;$$

$$z_{i,j,k}^{(n)}=\frac{p_2z_{i-1,j,k}^{(n)}-F_{i,j,k}^{(n)}}{p_0-p_2r_{i-1,j,k}},\quad i=1,2,...,I; \tag{25}$$

$$\tilde{y}_{i,j,k}^{(n+1)}=r_{i+1,j,k}\tilde{y}_{i+1,j,k}^{(n+1)}+z_{i+1,j,k}^{(n)},\quad i=I-1,...,1.$$

Кількість M_1 ітерацій виконаємо за формулами головного ітераційного процесу (20), (21), де знаходимо $\lambda_1=\lambda_1^{(M_1)}$ з точністю ε_1. Решту ітерацій обчислюємо за формулами (20), (21) з використанням прискорення збіжності за допомогою параметра верхньої релаксації ω_t. Розв'язок $y_{i,j,k}$ у вузлах сітки обчислюємо допоки виконується умова

$$\left| y_{i,j,k}^{(n+1)} - y_{i,j,k}^{(n)} \right| < \varepsilon, \tag{26}$$

де $\varepsilon > 0$ — задане мале число.

Числові експерименти

Розв'яжемо задачу (3)—(6) в кулі радіусом $R = 0,2$ з відомим точним розв'язком $u(r,\varphi,\theta) = r^3 \sin^3\theta\left(\cos^3\varphi + \sin^3\theta\right) + \cos^3\theta$ та правою частиною $f(r,\varphi,\theta) = 6r\left(\cos\varphi\cos\theta + \right.$ $\left.+\sin\varphi\sin\theta + \cos\theta\right)$.

Досліджено, що зі зменшенням кроків сітки похибка між точним і наближеним розв'язками у відповідних вузлах сітки зменшується. Крім того, покращення розв'язку залежить від кількості точок інтегрування правої частини різницевого рівняння. Результати наведені в таблиці.

Вибір точок інтегрування та похибка отриманих результатів

Ітераційні методи	Кількість точок інтегрування	$\lVert y-u \rVert_\infty$	Час виконання	Кількість ітерацій
Метод простої ітерації	5 10 15	0,00306850550013454 0,00306826524195136 0,00306829629907945	00:00:22.343750 00:02:04.656250 00:05:11.875000	474
Метод Зейделя	5 10 15	0,00306850549287542 0,00306829629862321 0,00306826337552789	00:00:20.953125 00:01:47.640625 00:04:40.093750	410
МВР за точками	5 10 15	0,00306850528286126 0,00306829624412452 0,00306825178326411	00:00:20.812500 00:01:45.656250 00:04:33.968750	307
МВР за лініями	5 10 15	0,00306850416129194 0,00306829622383628 0,00306122661317383	00:00:11.296875 00:00:21.515625 00:00:42.281250	75

$$\varepsilon = 10^{-5}, \quad I \times J \times K = 10 \times 10 \times 10.$$

Висновки

В роботі наводиться методика побудови різницевого рівняння Пуассона в сферичній системі координат зі спеціальним вибором сітки. До розв'язування системи сіткових рівнянь застосовано різні ітераційні методи і виконано їх порівняльний аналіз. Оскільки найефективнішим виявився метод верхньої релаксації за лініями, в роботі наведено розрахункові формули цього методу. На різних модельних задачах апробовано цю методику. Зроблено аналіз результатів за кількістю ітерацій, часом обчислення, кількістю точок інтегрування правої частини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 246 с.
2. Дудикевич А. Т. Чисельне розв'язування плоскої та осесиметричної задачі Діріхле для рівняння Пуассона у випадку складних областей / А. Т. Дудикевич, Л. І. Підківка. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2001. — 101 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А.Самарский. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
4. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри / С. М. Шахно. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 245 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 20.03.2013
Рекомендована до друку 2.04.2013

Дудикевич Анна Теодорівна — доцент.

Кафедра обчислювальної математики;

Кардаш Андрій Іванович — доцент, ***Левицька Софія Михайлівна*** — старший викладач.

Кафедра програмування, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів