

О. В. Соломчак, канд. техн. наук, доц.

## АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ КОМПЕНСАЦІЇ РЕАКТИВНОЇ ПОТУЖНОСТІ

Запропоновано алгоритми розв'язку типових оптимізаційних задач компенсації реактивної потужності з використанням методів покоординатного спуску та невизначених множників Лагранжа, як неперервних та дискретних задач нелінійного програмування.

### Математична модель задачі нелінійного програмування

На практиці частіше зустрічаються нелінійні залежності ніж лінійні. Методи нелінійного програмування (НП) застосовують для вибору оптимальних розв'язків в процесі планування, розвитку і експлуатації енергосистем. За допомогою математичних методів створюють оптимальні паливно-енергетичні баланси, виявляють шляхи найекономічнішого розвитку енергосистем, здійснюється економічно-оптимальний розподіл навантаження між електростанціями та ін.

Математична модель задачі НП має вигляд

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min),$$

за обмежень  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i; \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, n}$ .

Універсального методу розв'язання нелінійних задач не існує. Це пояснюється тим, що математична модель має множину розв'язків, яка в загальному випадку не є опуклою, або кількість крайніх точок нескінченна. У зв'язку з цим методи НП розробляються під спеціальні класи задач.

До таких задач відноситься і оптимальна компенсація реактивної потужності.

### Вибір оптимальної потужності компенсуювальних пристроїв за дисконтованими витратами

В заданій схемі електропостачання (рис. 1) потрібно визначити потужність компенсуювальних пристроїв (КП)  $Q_{K1}$  і  $Q_{K2}$  у вузлах 1 і 2, виходячи з умови мінімуму дисконтованих витрат (вартість встановлення цих пристроїв і втрат активної потужності в схемі, витрати на експлуатацію, плата за реактивну електричну енергію).

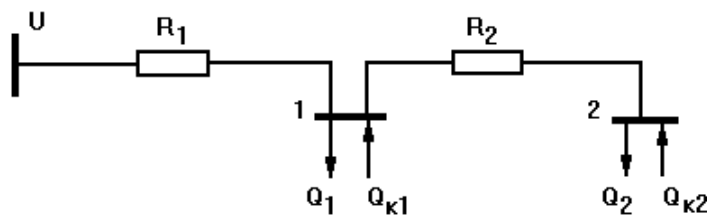


Рис. 1. Схема електропостачання

Вихідні дані: напруга схеми  $U = 10$  кВ. Опори ліній  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом, реактивне навантаження вузлів 1 і 2  $Q_1 = 500$  квар і  $Q_2 = 700$  квар. Питомі витрати на встановлення КП  $z_0 = 50$  у. о./квар; норматив щорічних витрат на експлуатацію  $\alpha_e = 0,043$ ; норма дисконту  $E = 0,1$ ; час найбільших втрат  $\tau = 3410$  год; час використання максимального навантаження  $T_m = 5000$  год; питомі витрати на покриття втрат активної потужності  $c_0 = 0,1$  у. о./кВт·год; тариф на відпускну електроенергію електростанцій  $T = 0,05$  у. о./кВт·год; економічний еквівалент реактивної потужності  $D = 0,02$ .

Розв'язання.

Цільова функція дисконтованих витрат включає капіталовкладення на встановлення КП, експлуатаційні витрати та вартість втрат активної електроенергії в схемі, плату за перетоки реактивної електроенергії:

$$Z = K + \frac{B_e + B_{\Delta W} + \Pi_Q}{E} \rightarrow \min;$$

$$Z = z_0(Q_{K1} + Q_{K2}) + \frac{\alpha_e z_0(Q_{K1} + Q_{K2})}{E} + \frac{\Delta P \tau C_0}{E} + \frac{W Q_{\text{сш}} DT}{E} =$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha_e}{E}\right) z_0(Q_{K1} + Q_{K2}) + \frac{(Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2})^2}{U^2} \cdot \frac{R_1 \tau C_0 \cdot 10^{-3}}{E} +$$

$$+ \frac{(Q_2 - Q_{K2})^2}{U^2} \cdot \frac{R_2 \tau C_0 \cdot 10^{-3}}{E} + \frac{|Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2}| T_M DT}{E} \rightarrow \min.$$

Після зведення до спільних множників, отримаємо:

$$Z = a_1(Q_{K1} + Q_{K2}) + a_2(Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2})^2 + a_3(Q_2 - Q_{K2})^2 + a_4|Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2}| \rightarrow \min,$$

де  $a_1 = 71,5$ ;  $a_2 = 0,1023$ ;  $a_3 = 0,1364$ ;  $a_4 = 50$ .

Для розв'язання задачі вибираємо *метод покоординатного спуску*. Визначимо часткові похідні цільової функції  $Z$  за змінними  $Q_{K1}$  і  $Q_{K2}$ :

$$\partial Z / \partial Q_{K1} = a_1 - 2a_2(Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2}) - a_4;$$

$$\partial Z / \partial Q_{K2} = a_1 - 2a_2(Q_1 + Q_2 - Q_{K1} - Q_{K2}) - 2a_3(Q_2 - Q_{K2}) - a_4.$$

Беремо початкові наближення:  $Q_{K1}^0 = 0$ ,  $Q_{K2}^0 = 0$ . Для даних величин визначимо значення цільової функції та її часткових похідних:

$$Z^0 = 274148 \text{ у. о. } \quad \partial Z / \partial Q_{K1} = -224,02; \quad \partial Z / \partial Q_{K2} = -414,98.$$

Очевидно, що в напрямку змінної  $Q_{K2}$  цільова функція  $Z$  спадає швидше, ніж в напрямку змінної  $Q_{K1}$ , оскільки  $|\partial Z / \partial Q_{K2}| > |\partial Z / \partial Q_{K1}|$ .

В напрямку змінної  $Q_{K2}$  і почнемо «спуск».

Візьмемо величину кроку  $\lambda = 100$  кВАр. Перше наближення (перший крок) буде  $Q_{K1}^0 = 0$ ,  $Q_{K2}^1 = 100$  квар. Значення цільової функції  $Z^1 = 235037$ . Аналогічно виконуємо подальші кроки.

Дев'ятий крок:  $Q_{K1}^0 = 0$ ,  $Q_{K2}^9 = 900$  квар. Значення цільової функції  $Z^9 = 94013$ .

Десятий крок:  $Q_{K1}^0 = 0$ ,  $Q_{K2}^{10} = 1000$  квар. Значення цільової функції  $Z^{10} = 97868$  у. о.

Очевидно, що «спуск» по координаті  $Q_{K2}$  доцільно зупинити, оскільки  $Z^{10} > Z^9$ , і повернутись до значень змінних  $Q_{K1}^0 = 0$ ,  $Q_{K2}^9 = 900$  квар, отриманих на дев'ятому кроці.

Виконаємо новий крок  $\lambda = 100$  квар в напрямку другої змінної  $Q_{K1}$ :  $Q_{K1}^1 = 100$  квар,  $Q_{K2}^9 = 900$  квар. Значення цільової функції  $Z^{10} = 91048$ ;  $Q_{K1}^2 = 200$  квар;  $Q_{K2}^9 = 900$  квар. Значення цільової функції  $Z^{11} = 90129$ ;  $Q_{K1}^3 = 300$  квар;  $Q_{K2}^9 = 900$  квар;  $Z^{12} = 91256$ .

Подальше переміщення в напрямку змінної  $Q_{K1}$  недоцільне, оскільки  $Z^{12} > Z^{11}$ .

Далі знову продовжуємо переміщатись по змінній  $Q_{K2}$ . Тоді отримаємо оптимальну точку з координатами  $Q_{K1} = 400$  квар,  $Q_{K2} = 700$  квар, яка знаходиться в області мінімуму цільової функції  $Z = 84673$ . Для взятої довжини кроку  $\lambda = 100$  кВАр неможливо отримати точніший розв'язок. Для цього потрібно зменшити крок  $\lambda$  і виконати повторне розв'язання. Розв'язок такий:  $Q_{K1} = 395$  квар,  $Q_{K2} = 700$  квар,  $Z = 84670$ .

### Розподіл заданої потужності компенсувальних пристроїв між вузлами схеми

Для заданої схеми електропостачання (рис. 2) потрібно розподілити між вузлами 1, 2 і 3 КП сумарною потужністю  $Q$ . Критерій оптимальності — мінімум втрат активної потужності в мережі. ISSN 1997-9266. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2012. № 2

Для заданої схеми електропостачання (рис. 2) потрібно розподілити між вузлами 1, 2 і 3 КП сумарною потужністю 1000 квар. Критерій оптимальності – мінімум втрат активної потужності.

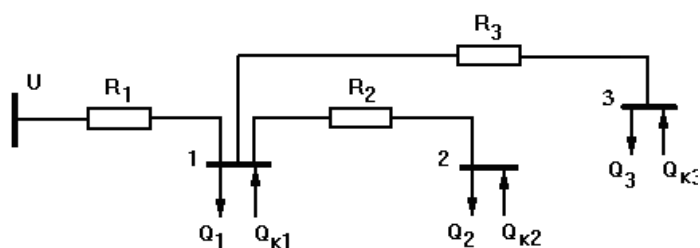


Рис. 2. Схема електропостачання

*Вихідні дані:* напруга схеми  $U = 10$  кВ, опори ліній  $R_1 = 0,4$  Ом,  $R_2 = 0,5$  Ом,  $R_3 = 0,6$  Ом; реактивне навантаження вузлів 1, 2 і 3  $Q_1 = 600$ ,  $Q_2 = 500$ ,  $Q_3 = 400$  кВАр.

*Розв'язання.*

Цю задачу пропонується розв'язати методом невизначених множників Лагранжа.

Згідно із вихідними даними, втрати активної потужності (цільова функція) визначаються співвідношенням

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3})^2 + a_2(Q_2 - Q_{K2})^2 + a_3(Q_3 - Q_{K3})^2 =$$

$$= 0,004(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3})^2 + 0,005(500 - Q_{K2})^2 + 0,006(400 - Q_{K3})^2 \rightarrow \min,$$

де  $a_1 = R_1/U^2 = 0,004$ ;  $a_2 = R_2/U^2 = 0,005$ ;  $a_3 = R_3/U^2 = 0,006$ .

Сумарна потужність джерела реактивної потужності обмежується умовою

$$Q_{K1} + Q_{K2} + Q_{K3} - 1000 = 0.$$

Функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = 0,004(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3})^2 + 0,005(500 - Q_{K2})^2 +$$

$$+ 0,006(400 - Q_{K3})^2 + \lambda(Q_{K1} + Q_{K2} + Q_{K3} - 1000) \rightarrow \min.$$

Для знаходження мінімуму функції Лагранжа визначимо її частинні похідні для всіх змінних і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{K1}} = -0,008(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3}) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{K2}} = -0,008(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3}) - 0,01(500 - Q_{K2}) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{K3}} = -0,008(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3}) - 0,012(400 - Q_{K3}) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q_{K1} + Q_{K2} + Q_{K3} - 1000 = 0.$$

Отримана система лінійних рівнянь легко розв'язується. Із першого рівняння системи визначається величина множника Лагранжа

$$\lambda = 0,008(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3}).$$

Підставивши  $\lambda$  в друге рівняння системи, отримаємо:

$$-0,01(500 - Q_{K2}) = 0.$$

$$Q_{K2} = 500 \text{ квар.}$$

Підставивши  $\lambda$  в третє рівняння системи, отримаємо:

$$-0,012(400 - Q_{K3}) = 0;$$

$$Q_{K3} = 400 \text{ квар.}$$

З четвертого рівняння системи  $Q_{K1} = 100$  квар.

З першого рівняння системи знайдемо величину множника Лагранжа

$$\lambda = 0,008(1500 - 100 - 500 - 400) = 4.$$

Згідно з виразом цільової функції мінімальні втрати активної потужності в схемі електропостачання за умов сумарної потужності КП величиною  $Q_K = 1000$  квар складатимуть

$$\begin{aligned} \Delta P &= 0,004(1500 - Q_{K1} - Q_{K2} - Q_{K3})^2 + 0,005(500 - Q_{K2})^2 + 0,006(400 - Q_{K3})^2 = \\ &= 0,004(1500 - 100 - 500 - 400)^2 + 0,005(500 - 500)^2 + 0,006(400 - 400)^2 = 2 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

### Визначення оптимального вузла встановлення КП (задача з двійковими змінними)

Необхідно визначити оптимальний вузол встановлення однієї конденсаторної батареї, заданої потужності  $Q_K$ , в схемі електропостачання (рис. 3).

Критерій оптимальності — мінімум втрат активної потужності в схемі.

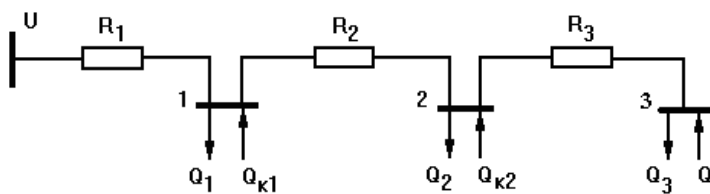


Рис. 3. Схема електропостачання

*Вихідні дані:* напруга схеми  $U = 10$  кВ, потужність конденсаторної батареї  $Q_K = 1000$  квар; опори ліній  $R_1 = 0,4$  Ом,  $R_2 = 0,5$  Ом,  $R_3 = 0,6$  Ом, реактивне навантаження вузлів 1, 2 і 3  $Q_1 = 600$ ,  $Q_2 = 500$ ,  $Q_3 = 400$  квар.

*Розв'язання.* У заданій схемі є три вузли 1, 2, і 3, в кожному з яких можна встановити КП. Позначимо змінні  $Q_{K1}$ ,  $Q_{K2}$  і  $Q_{K3}$  потужності КП, що розміщені відповідно у вузлах 1, 2 і 3. Це дискретні змінні, кожна з яких може приймати два значення 0 або 1000 квар.

Кожній змінній  $Q_{K1}$ ,  $Q_{K2}$  і  $Q_{K3}$  поставимо у відповідність двійкову змінну  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  і  $\delta_3$ .

Цільова функція — втрати потужності в схемі, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta P &= a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{K1}\delta_1 - Q_{K2}\delta_2 - Q_{K3}\delta_3)^2 + \\ &+ a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{K2}\delta_2 - Q_{K3}\delta_3)^2 + a_3(Q_3 - Q_{K3}\delta_3)^2 \rightarrow \min, \end{aligned}$$

де  $a_i = R_i/U^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Вираз для втрат потужності передбачає можливість встановлення КП у кожному із трьох вузлів. Однак, залежно від величини двійкової змінної, КП у вузлі  $i$  потрібно встановити  $\delta_i = 1$  або не потрібно встановлювати, якщо  $\delta_i = 0$ .

Складемо систему обмежень. Оскільки, КП може бути встановлений тільки в одному вузлі, сума двійкових змінних повинна дорівнювати 1.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

де  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  і  $\delta_3$  — двійкові.

Величина дискретної змінної  $Q_{Ki}$  залежатиме від значення відповідної двійкової змінної  $\delta_i$ . Змінна  $Q_{Ki} = Q_K$ , якщо  $\delta_i = 1$  і  $Q_{Ki} = 0$ , якщо  $\delta_i = 0$ . Запишемо ці умови:

$$Q_{K1} = Q_K\delta_1; \quad Q_{K2} = Q_K\delta_2; \quad Q_{K3} = Q_K\delta_3.$$

Граничні умови не записуємо, оскільки маємо тільки дискретні і двійкові змінні.

Розв'язавши задачу одним з відомих методів отримаємо такі результати:  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 1$ ,  $\delta_3 = 0$ ,  $Q_{K1} = 0$ ,  $Q_{K2} = 1000$  квар,  $Q_{K3} = 0$ ,  $\Delta P = 2010$  Вт.

Таким чином, для забезпечення мінімальних втрат потужності КП потужністю 1000 квар слід встановити у вузлі 2 схеми електропостачання.

### Вибір оптимальної потужності КП у вузлі схеми (задача з дискретними змінними)

Необхідно вибрати оптимальну потужність КП у вузлі 2 (рис. 4) із наявних потужностей,

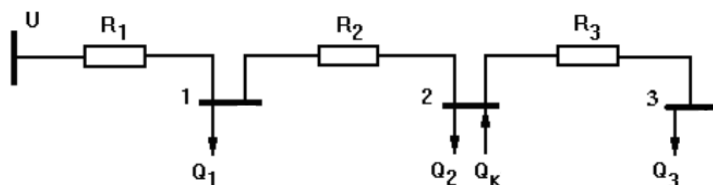


Рис. 4. Схема електропостачання

для забезпечення мінімуму втрат активної потужності в схемі.

*Вихідні дані* беремо з попередньої задачі. Потужність КП може набувати таких дискретних значень: 1100, 1200, 1300 квар.

*Розв'язання.* У цьому прикладі маємо одну дискретну змінну — потужність КП в другому вузлі. Ця

змінна може приймати три дискретних значення  $Q_{K1} = 1100$ ,  $Q_{K2} = 1200$ ,  $Q_{K3} = 1300$  квар. Кожному значенню дискретної змінної поставимо у відповідність двійкову змінну  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ .

Цільова функція — втрати потужності в схемі, матиме такий вигляд (сума втрат на кожній ділянці)

$$\Delta P = a_1 (Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{K1}\delta_1 - Q_{K2}\delta_2 - Q_{K3}\delta_3)^2 + a_2 (Q_2 + Q_3 - Q_{K1}\delta_1 - Q_{K2}\delta_2 - Q_{K3}\delta_3)^2 + a_3 Q_3^2 \rightarrow \min,$$

де  $a_i = R_i / U^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Розглянемо обмеження. Оскільки дискретна змінна (потужність КБ) може мати тільки одне значення, то сума двійкових повинна дорівнювати 1.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

де  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  і  $\delta_3$  — двійкові.

Інших обмежень немає.

Граничні умови не записуємо, оскільки маємо тільки дискретні і двійкові змінні.

Розв'язок задачі такий :

$$\delta_1 = 0; \delta_2 = 1; \delta_3 = 0; Q_K = 1200 \text{ квар}; \Delta P = 1770 \text{ Вт.}$$

## Висновки

Запропоновані математичні моделі і алгоритми можуть бути використані інженерами у виробничій практиці та аспірантами і науковцями у своїх дослідженнях.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сидоров В. С. Алгоритмізація задач електроенергетики : навч. посіб. / В. С. Сидоров. — К. : НМК ВО. — 1993.—227 с.
2. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. / В. Я. Кутковецький. — К. : ТОВ Видавничий дім «Професіонал», 2004. —350 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підруч. / Ю. П. Зайченко. — К. : ВД «Слово», 2006. — 316 с.
4. Аввакумов В. Г. Постановка и решение электроэнергетических задач исследования операций / В. Г. Аввакумов. — К. : Вища шк., 1983. — 240 с.
5. Соломчак О. В. Алгоритмізація оптимізаційних задач електроенергетики. Ч. 1. Лінійне програмування : метод. вказівки з курсу / О. В. Соломчак. — Івано-Франківськ : Факел, 2002. — 31 с.
6. Соломчак О. В. Алгоритмізація оптимізаційних задач електроенергетики. Ч. 2. Нелінійне програмування : метод. вказівки з курсу / О. В. Соломчак, І. І. Сорохтей. — Івано-Франківськ : Факел, 2009. — 81 с.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті

Стаття надійшла до редакції 10.10.11  
Рекомендована до друку 25.11.11

**Соломчак Олег Володимирович** — доцент кафедри електропостачання та електрообладнання промислових підприємств.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ