

УДК 621.7:519.85

В. М. Михалевич, д-р. техн. наук, проф.; Ю. В. Добранюк, асп.; Є. А. Трач, студ.

## ВИЗНАЧЕННЯ ЗА ПОЧАТКОВОЮ ДІЛЯНКОЮ ТРАЄКТОРІЇ ДЕФОРМАЦІЙ ГРАНИЧНОГО СТАНУ БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЗРАЗКІВ ПІД ЧАС ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ОСАДЖЕННЯ

*Розглянуто задачу прогнозування граничних деформацій матеріалу бічної поверхні циліндричних зразків в процесі холодного вісесиметричного осадження на основі початкового фрагменту експериментальних даних. Отримані результати дають можливість на початкових стадіях деформування не тільки прогнозувати момент досягнення граничного стану і, за необхідності, вносити певні зміни у процес деформування, але й реалізовувати експрес-методику дослідження властивостей матеріалу за рахунок зменшення трудомісткості експериментальних досліджень.*

### Вступ

Вісесиметричне осадження циліндричних зразків є не тільки поширеною технологічною операцією, але і одним із видів лабораторних досліджень для визначення найважливіших фізико-механічних властивостей матеріалів. Як відомо [1–5], для певної групи матеріалів під час процесу вісесиметричного осадження циліндричних зразків поява пошкоджень зосереджується на бічній поверхні в зоні максимального діаметра. Причому ступінь деформування, при якому з'являються тріщини, залежить від інтенсивності бочкоутворення на бічній поверхні. У свою чергу, інтенсивність бочкоутворення визначається умовами тертя на торцях зразка [2, 4].

Гранична деформація матеріалу під час торцевого стиснення за різних умов є важливою характеристикою, врахування якої необхідно як в аналізі експлуатаційних характеристик готових деталей так і під час розробки технологій їх виготовлення.

Як показано [5–10], на бічній поверхні за умови бочкоутворення реалізується нестационарне деформування, що проявляється у зміні показника  $\eta$ . Тому постає задача розробки моделі граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження.

На сьогоднішній день відсутнє аналітичне описання кривої граничних деформацій бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження за різних умов тертя та типорозмірів зразка. Поява такої моделі надасть можливість ставити та розв'язувати принципово нові задачі теорії граничних станів стосовно вісесиметричного осадження.

*Метою роботи є відтворення аналітичної залежності між коловою та осьюовою деформаціями та подальшого визначення граничних деформацій на основі експериментально заданої початкової ділянки цієї залежності.*

### Основна частина

Відповідно до експериментально-аналітичної методики [6–10], для характеристики граничного стану початковою інформацією є експериментально отримана залежність між осьовою та коловою деформаціями у вигляді таблично заданої функції. Деформації  $\varepsilon_z$  та  $\varepsilon_\phi$  визначаються як натуральні логарифми відношення поточних розмірів до початкових [1].

Для апроксимування залежностей між компонентами деформацій бічної поверхні зразків під час вісесиметричного осадження будемо використовувати співвідношення у вигляді розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними [7, 8]

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-\varepsilon_\phi/m}, \quad m > 0, \quad (1)$$

де  $m > 0$  — константа, яка визначається експериментально. Розв'язком диференціального рівняння (1), з урахуванням початкової умови

$$\varepsilon_z|_{\varepsilon_\phi=0} = 0, \tag{2}$$

отримаємо [7, 8]

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_\phi + \frac{3m}{2}\left(e^{-\varepsilon_\phi/m} - 1\right). \tag{3}$$

Використовуючи параметричний вигляд залежності (3) [7, 8]

$$\begin{cases} \varepsilon_\phi = -m \ln(1-t); \\ \varepsilon_z = \frac{m}{2}[\ln(1-t) - 3t], \end{cases} t \in [0,1), \tag{4}$$

де  $t$  — параметр, який характеризує стадію процесу деформування, вирази для обчислення показника напруженого стану та накопиченої деформації [1–3, 6, 9–11]

$$\varepsilon_u(\varepsilon_\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{\varepsilon_\phi} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi}\right)^2 + \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} + 1} \cdot d\varepsilon_\phi; \tag{5}$$

$$\eta = \frac{2\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\left(2\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} + 1\right)^2}}, \tag{6}$$

а також модель розсіяних пошкоджень, яка базується на лінійному принципі [2, 3, 5–10]

$$\Psi(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}[\eta(\varepsilon_u)]}, \tag{7}$$

де  $\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(\eta)$  — крива граничних деформацій під час стаціонарного деформування (діаграма пластичності);  $\eta = \eta(\varepsilon_u)$  — траєкторії деформацій, та апроксимацію діаграми пластичності [12]

$$\varepsilon_{*c}(\eta) = a_2 \exp\left(-\eta \ln\left(\frac{(1-\eta)a_1}{2a_2} + \frac{(1+\eta)a_2}{2a_3}\right)\right), \eta \in [-1, 1], \tag{8}$$

де  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$  — деякі константи, які визначаються відповідно до результатів досліджень в умовах стаціонарного деформування. Отримаємо модель граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження

$$\begin{cases} \varepsilon_u(t, m) = m \int_0^t \sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} + 3} \cdot dx = \frac{m}{2} \left[ 4 + \ln\left(\frac{1}{3} \frac{\sqrt{1+3(1-t)^2} + 1}{\sqrt{1+3(1-t)^2} - 1}\right) - 2\sqrt{1+3(1-t)^2} \right], t \in [0,1); \\ \eta(t) = \frac{3t-2}{\sqrt{1+3(1-t)^2}}, t \in [0,1); \end{cases}$$

$$\int_0^{t^*(m)} \frac{m \sqrt{\frac{1}{(1-t)^2} + 3}}{a_2 \cdot \exp\left(-\frac{(3t-2) \ln\left(\frac{(1-w(t))a_1}{2a_2} + \frac{(1+w(t))a_2}{2a_3}\right)}{\sqrt{4-6t+3t^2}}\right)} dt - 1 = 0; \tag{9}$$

$$w(t) = \frac{3t - 2}{\sqrt{4 - 6t + 3t^2}}$$

Використовуючи модель граничних деформацій (9), можна виконати прогнозування граничних деформацій матеріалу бічної поверхні циліндричних зразків на основі початкового фрагменту експериментальних даних. При цьому «початкову ділянку» відновлюваної кривої залежностей між компонентами деформацій можна характеризувати тільки кількістю точок  $N_n$ , оскільки величина накопиченої деформації на межі ділянки може бути визначена наближено як добуток  $N_n$  та  $\Delta_c$ , де  $\Delta_c$  – середина характерного інтервалу для відповідної групи матеріалу. Так, для сталей 10, 20, 35, 60,  $\Delta_c = 0,125$ .

Дослідження точності відтворення траєкторії деформації та визначення розрахункового значення граничних деформацій від кількості використаних експериментальних точок виконували на основі експериментальних даних вісесиметричного осадження циліндричних зразків, виготовлених із сталі 35.

Апроксимування експериментальних даних, визначення граничних деформацій, побудову траєкторій деформацій та кривих граничних деформацій виконували із використанням комп'ютерних програм «Апроксимація залежностей між компонентами деформацій на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення» [13] та «Розрахунок граничного стану та побудова кривих граничних деформацій бічної поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення» [14].

Результати експериментального дослідження сталі 35 мають 15 експериментальних даних, які використовували для дослідження впливу кількості експериментальних даних на точність визначення граничних деформацій. Відповідно до зазначених умов, точне розрахункове значення граничних деформацій отримаємо із використанням усіх експериментальних даних. Відносно отриманого значення граничних деформацій будемо оцінювати точність визначення граничного стану на основі неповної сукупності експериментальних даних.

Результати апроксимування залежностей між компонентами деформацій під час вісесиметричного осадження циліндричних зразків із сталі 35 показані на рис. 1 та в табл. 1.

Здійснення аналізу впливу кількості використання експериментальних даних на точність прогнозування можна проводити як порівнянням кривих залежності між компонентами деформацій, так і траєкторій деформацій. Візуально розбіжність різних кривих набагато краще спостерігається для траєкторій деформацій, оскільки вони визначаються похідними залежності між компонентами деформацій.

Побудова траєкторій деформацій та визначення граничних деформацій в залежності від вибору кількості вибраних експериментальних даних показано на рис. 2 та в табл. 2.

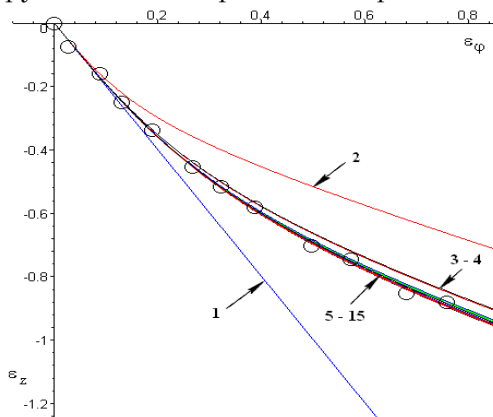


Рис. 1. Залежність між осьовою  $\varepsilon_z$  та коловою  $\varepsilon_\phi$  деформаціями під час вісесиметричного осадження зразків із сталі 35, яка апроксимована співвідношенням (1) із використанням від 1 до 15 експериментальних даних (криві 1–15, відповідно)

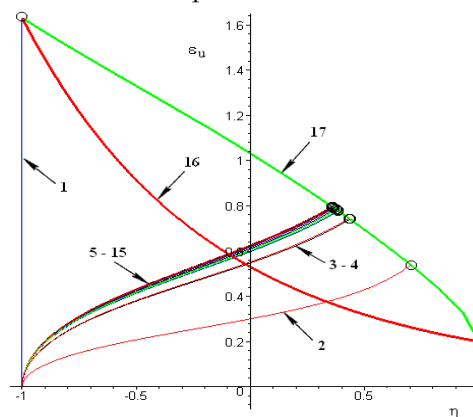


Рис. 2. Криві граничних деформацій та траєкторії деформацій бічної поверхні циліндричного зразка, виготовленого із сталі 35, під час вісесиметричного осадження: 1–15 – траєкторії деформацій; 16 – крива граничних деформацій під час стаціонарного деформування ( $a_1 = 1,63$ ;  $a_2 = 0,53$ ;  $a_3 = 0,2$  [15]); 17 – крива граничних деформацій під час нестаціонарного деформування

**Значення параметра апроксимації залежності між компонентами деформацій  
в залежності від кількості експериментальних даних**

Точки, N / %	$m$	$\frac{\sum \delta_i}{N}$	$\Delta_m =  m_i - m_k ,$ $i = 1 \dots k$	$\Delta_m, \%$
1 / 6,67	209,56	$1 \cdot 10^{-4}$	209,27	$73,7 \cdot 10^3$
2 / 13,34	0,136	$1 \cdot 10^{-4}$	0,1477	52
3 / 20	0,25	$1 \cdot 10^{-4}$	0,0337	11,8
4 / 26,67	0,248	$0,6 \cdot 10^{-4}$	0,0357	12,5
5 / 33,34	0,272	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,0117	4,1
6 / 40	0,275	$0,45 \cdot 10^{-4}$	0,0087	3
7 / 46,67	0,271	$0,4 \cdot 10^{-4}$	0,0127	4,5
8 / 53,34	0,281	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,0027	0,95
9 / 60	0,277	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,0067	2,3
10 / 66,67	0,282	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,0017	0,6
11 / 73,34	0,279	$0,6 \cdot 10^{-4}$	0,0047	1,6
12 / 0,8	0,283	$0,7 \cdot 10^{-4}$	0,0007	0,2
13 / 86,67	0,284	$0,7 \cdot 10^{-4}$	0,0003	0,1
14 / 93,34	0,2842	$0,6 \cdot 10^{-4}$	0,0005	0,17
15 / 100	0,2837	$0,6 \cdot 10^{-4}$	0	0

Таблиця 2

**Значення граничних деформацій при прогнозуванні граничного стану бічної поверхні зразка  
із сталі 35 під час вісесиметричного осадження**

Точки, N / %	$t_*$	$\eta_*$	$\varepsilon_*$	$\Delta_{\varepsilon_*} =  \varepsilon_{*i} - \varepsilon_{*k} ,$ $i = 1 \dots k$	$\Delta_{\varepsilon_*}, \%$
1 / 6,67	0,0039	-0,9999	1,6350	0,8384	105,24
2 / 13,34	1,2563	0,7033	0,5382	0,2584	32,43
3 / 20	1,1295	0,4318	0,7442	0,0524	6,57
4 / 26,67	1,1315	0,4365	0,7407	0,0559	7,01
5 / 33,34	1,1089	0,3824	0,7795	0,0171	2,14
6 / 40	1,1069	0,3774	0,7830	0,0136	1,7
7 / 46,67	1,1105	0,3860	0,7769	0,0197	2,47
8 / 53,34	1,1012	0,3634	0,7929	0,0037	0,46
9 / 60	1,1051	0,3731	0,7861	0,0105	1,32
10 / 66,67	1,1003	0,3612	0,7944	0,0022	0,27
11 / 73,34	1,1027	0,3672	0,7901	0,0065	0,81
12 / 0,8	1,0991	0,3585	0,7964	0,0002	0,025
13 / 86,67	1,0989	0,3578	0,7968	0,0002	0,025
14 / 93,34	1,0985	0,3569	0,7975	0,0009	0,11
15 / 100	1,0990	0,3581	0,7966	0	0

Аналіз результатів, поданих у табл. 1 і 2 та рис. 1 і 2, показав, що, починаючи із вибору трьох-чотирьох експериментальних даних для відтворення кривої залежностей між осью та коловою деформаціями та визначення граничних деформацій, отримується похибка, яка знаходиться в межах похибки експериментальних даних.

### Висновок

Для прогнозування граничних деформацій бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження та відтворення траєкторії деформацій відповідно до експериментально-аналітичної методики достатньо використовувати 3–4 експериментальні точки.

Результати розв'язання задачі дадуть можливість на початкових стадіях деформування не тільки прогнозувати момент досягнення граничного стану і, за необхідності, вносити певні зміни у процес деформування, але й реалізувати експрес-методику дослідження властивостей матеріалу за рахунок зменшення трудомісткості експериментальних досліджень.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов / Г. А. Смирнов-Аляев. — М.–Л. : Машгиз, 1961. — 463 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. — К. : УМК ВО, 1989. — 152 с.
3. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение / В. Л. Колмогоров. — М. : Metallurgiya, 1970. — 230 с.
4. Пластичность и разрушение / под ред. В. Л. Колмогорова. — М. : Metallurgiya, 1977. — 336 с.
5. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич — Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. — 195 с. — ISBN 966-7199-20-7.
6. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — 2009. — № 2. — Режим доступу до журн. : [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009\\_2/2009-2.htm](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm).
7. Михалевич В. М. Модель пластичного деформування матеріалу на вільній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження. Частина 1. Апроксимація деформацій / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2010. — № 2 — С. 97—102.
8. Михалевич В. М. Модель пластичного деформування матеріалу на вільній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження. Частина 2. Визначення накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій на основі різних апроксимацій / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2010. — № 3 — С. 99—102.
9. Михалевич В. М. Экспериментально-аналитическая методика и математические модели деформированного состояния на свободной боковой поверхности цилиндрических образцов при осесимметричной осадке / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Обработка металлов давлением. Сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА — 2010 — № 1(22) — С. 114—119.
10. Михалевич В. М. Моделирование предельных деформаций на свободной поверхности и оптимизация ступенчатого деформирования / В. М. Михалевич, В. А. Краевский, Ю. В. Добранюк // Состояние, проблемы и перспективы развития кузнечно-прессового машиностроения и кузнечно-штамповочных производств / Кузнец-2010 : сб. докл. и матер. X конгресса. — Рязань — 2010. — С. 367—378.
11. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич // Пробл. прочности. — 2003. — № 3. — С. 5—14.
12. Михалевич В. М. Аппроксимация кривых предельной деформации сплайн-функциями / В. М. Михалевич, Л. И. Алиева // Обработка металлов давлением. Сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА — 2010 — № 3(24) — С. 3—10.
13. Михалевич В. М. Апроксимація залежностей між компонентами деформацій на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Свідectво про реєстрацію авторського права на твір № 38309 від 11 травня 2011 р.
14. Добранюк Ю. В. Розрахунок граничного стану та побудова кривих граничних деформацій бічної поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення / Ю. В. Добранюк, В. М. Михалевич, О. В. Михалевич // Свідectво про реєстрацію авторського права на твір № 38308 від 11 травня 2011 р.
15. Огородников В. А. Параметры модели, формирующей карту материала в процессах обработки давлением / В. А. Огородников, Л. И. Алиева, В. М. Кожушаный, И. А. Деревенько // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА — 2011 — № 1(26) — С. 91—98.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 7.10.11  
Рекомендована до друку 24.10.11

**Михалевич Володимир Маркусович** — завідувач кафедри, **Добранюк Юрій Володимирович** — аспірант.

Кафедра вищої математики;

**Трач Євген Анатолійович** — студент Інституту магістратури, аспірантури та докторантури.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця