УДК 519.711

Б. І. Мокін, д. т. н., проф., акад. НАПНУ;

А. В. Писклярова, к. т. н.;

Ю. В. Мокіна, к. е. н.

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРУ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК НА ФАЗОВІЙ ПЛОЩИНІ ПРОЦЕСУ ЗАСВОЄННЯ СТУДЕНТОМ ПРОГРАМИ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

За допомогою математичних моделей, синтезованих на фазовій площині, здійснено перший етап дослідження процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни.

Визначено особливі точки на фазовій площині, оцінено їх характер і дано змістовну інтерпретацію в поняттях процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни.

Постановка задачі і вихідні передумови

В роботі [1] нами синтезовані математичні моделі процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни на фазовій площині у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

для i-го часового напівінтервалу $[t^{(i)})$, протягом якого студент цю навчальну дисципліну не вивчає, у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 + \beta_{11}x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

для j-го часового напівінтервалу $[t_1^{(j)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, спілкуючись в аудиторії з викладачем, та у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 + \beta_{22}x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

для k-го часового напівінтервалу $[t_2^{(k)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, працюючи самостійно.

В математичних моделях (1), (2), (3) α_{11}, α_{22} — коефіцієнти, що характеризують ступінь забування студентом матеріалу навчальної дисципліни, вивченого раніше відповідно з викладачем і самостійно, α_{12}, α_{21} — коефіцієнти, що характеризують синергетичний вплив одна на одну складових процесу засвоєння студентом навчального матеріалу з викладачем та самостійно, β_{11}, β_{22} — коефіцієнти, що характеризують ступінь засвоєння нових знань відповідно на заняттях з викладачем та самостійно, а x_1, x_2 — фазові координати, що задають у відносних одиницях ступінь засвоєння студентом програми навчальної дисципліни відповідно на заняттях з викладачем та самостійно, для яких виконуються умови

$$x_1 = \frac{X_1}{X};\ \ x_2 = \frac{X_2}{X}; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} x_1 \le 1; \\ x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \le 1, \end{gathered} \tag{5}$$

де X — це та кількість знань, яку може мати студент, засвоївши протягом визначеного терміну часу T усі розділи програми певної навчальної дисципліни, X_1 — це така кількість знань з навчальної дисципліни, яку студент отримує від викладача під час аудиторних занять, а X_2 — це та кількість знань з даної дисципліни, яку студент засвоює, самостійно вивчаючи певні розділи програми. На рис. 1а на фазовій площині область значень фазових координат $(x_1,\ x_2)$, яка відповідає умовам (5), заштрихована.

Допускаючи, що напівінтервали $[t^{(i)})$, $[t_1^{(j)})$, $[t_2^{(k)})$ слідують один за одним і позначаючи кінцеві точки цих напівінтервалів символами $t_\kappa^{(i)}$, $t_{1\kappa}^{(j)}$, $t_{2\kappa}^{(k)}$, початкові умови, необхідні для однозначного розв'язання систем диференціальних рівнянь (1), (2), (3), задаємо у вигляді:

для системи рівнянь (1)

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(i)} &= x_1\left(t_{2\kappa}^{(k-1)}\right); \\ x_{2n}^{(i)} &= x_2\left(t_{2\kappa}^{(k-1)}\right); \end{aligned} \tag{6}$$

для системи рівнянь (2)

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(j)} &= x_1\left(t_\kappa^{(i)}\right); \\ x_{2n}^{(j)} &= x_2\left(t_\kappa^{(i)}\right); \end{aligned} \tag{7}$$

для системи рівнянь (3)

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(k)} &= x_1\left(t_{1\kappa}^{(j)}\right); \\ x_{2n}^{(k)} &= x_2\left(t_{1\kappa}^{(j)}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Використовуючи співвідношення (1)—(5), здійснимо аналіз процесу засвоєння студентом програми навчальної дисципліни. Почнемо цей аналіз з визначення особливих точок на фазовій площині та їх змістовної інтерпретації в термінах поставленої задачі.

Визначення особливих точок фазової площини

З точки зору математики [2] особливі точки фазової площини — це точки, в яких похідні від обох фазових координат одночасно дорівнюють нулю. А для нашої задачі, в якій фазові координати характеризують рівень знань навчальної дисципліни, отриманих студентом від спілкування з викладачем та самостійно, — це ті точки фазової площини, в яких швидкість приросту знань дорівнює нулю.

Для i-го часового напівінтервалу $[t^{(i)})$, протягом якого студент цю навчальну дисципліну не вивчає, виходячи з математичної моделі (1), можна стверджувати, що для визначення особливих точок потрібно використовувати систему рівнянь

$$\begin{aligned} -\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 &= 0; \\ -\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

яку можна подати і так:

$$\begin{aligned} \left(-\alpha_{11} + \alpha_{12}x_2\right)x_1 &= 0; \\ \left(-\alpha_{22} + \alpha_{21}x_1\right)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Із системи рівнянь (10) легко бачити, що одна особлива точка, позначимо її O_1, буде мати координати

$$x_1 = 0; \;\; x_2 = 0, \tag{11}$$

а друга, яку позначимо O_2, буде мати координати

$$x_1 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}; \;\; x_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}. \tag{12}$$

Очевидно, що особлива точка O_2 нас цікавитиме лише у тому випадку, коли вона лежатиме в області фазової площини, визначеній умовами (5), або, що те саме, виділеній на рис. 1а.

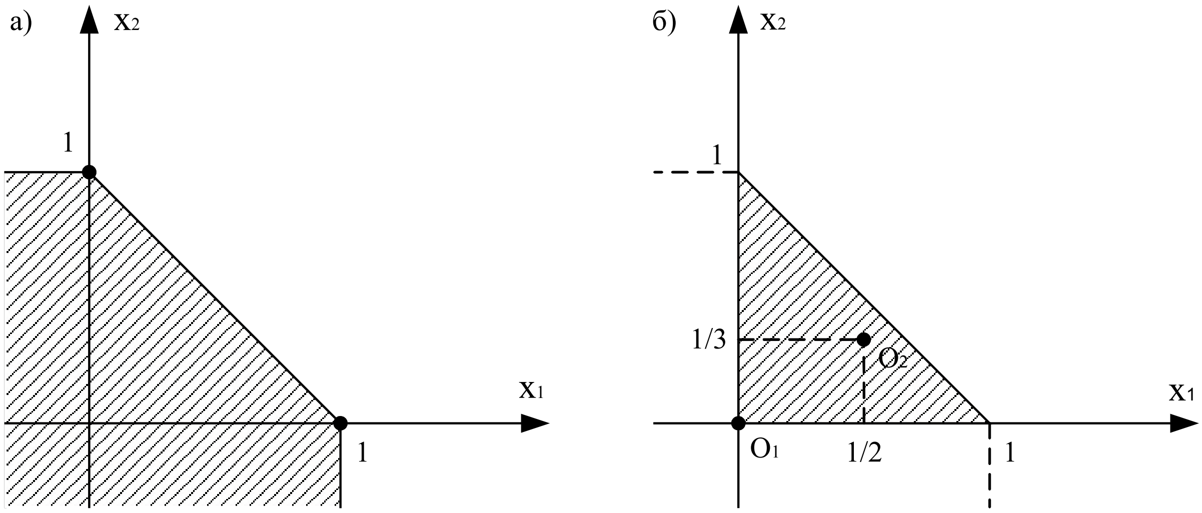

Рис. 1. Область допустимих значень фазових координат в задачі, що розв’язується (а), та приклад розміщення особливих точок в допустимій області фазової площини для випадку, коли талановитий студент не вивчає навчальну дисципліну ні в аудиторії з викладачем, ні самостійно (б)

На рис. 1б показані особлива точка O_1 та особлива точка O_2 за умов, що

$$\alpha_{21} = 2\alpha_{22}; \;\; \alpha_{12} = 3\alpha_{11}. \tag{13}$$

В інтерпретації нашої задачі про коефіцієнти, що фігурують в умовах (13), виходячи із їх визначення, можна сказати, що чим потужнішими є логіка і пам’ять студента, тим менші значення матимуть коефіцієнти $\alpha_{11},\ \alpha_{22}$, і чим різноманітнішими будуть педагогічні прийоми у викладача, або чим більш доступним та ілюстрованим рисунками і прикладами буде навчальний посібник, за яким студент вивчає розділи дисципліни самостійно, тим більші значення матимуть коефіцієнти $\alpha_{12},\ \alpha_{21}$. Тож можна стверджувати, що лише для талановитих студентів особлива точка O_2 лежатиме у тій частині фазової площини, яка задається умовами (5). А для пересічних, не надто талановитих студентів ця особлива точка лежатиме за межами цієї області, а тому під час побудови фазових траєкторій для не надто талановитого студента, які в реальних умовах закінчуються на границі вказаної фазової області, точку O_2 враховувати не потрібно.

Тепер розглянемо визначення особливих точок фазової площини для j-го часового напівінтервалу $[t_1^{(j)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань, спілкуючись в аудиторії з викладачем. Виходячи з системи диференціальних рівнянь (2), для цього випадку система алгебраїчних рівнянь, що необхідна для визначення особливих точок, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &-\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 + \beta_{11}x_1 = 0; \\ &-\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (14), знайдемо, що особлива точка O_1, як і у попередньому випадку, буде знаходитись у точці фазової площини з координатами, визначеними співвідношеннями (11). Що ж стосується особливої точки O_2, то вона буде мати координати

$$x_1 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}; \quad x_2 = \frac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{12}}. \tag{15}$$

В разі потужної логіки і пам'яті студента та високого рівня майстерності викладача матимемо:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} - \beta_{11} < 0; \\ &\alpha_{22} < \alpha_{21}, \end{aligned} \tag{16}$$

а в разі невисокої майстерності викладача матимемо:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} - \beta_{11} > 0; \\ &\alpha_{22} < \alpha_{21}. \end{aligned} \tag{17}$$

Це означає, що особлива точка O_2 для талановитих студентів знаходитиметься на фазовій площині справа від осі x_2 та знизу або зверху від осі x_1, але в заштрихованій області на рис. 2а.

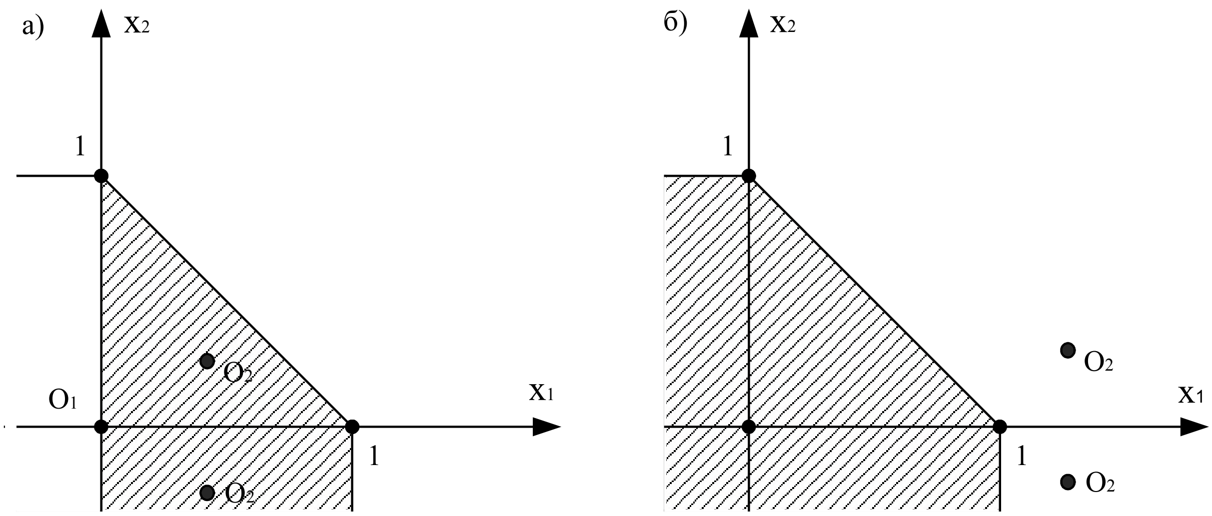

Рис. 2. Допустима область розміщення особливих точок на фазовій площині в разі, якщо студент має потужні логіку і пам'ять, а викладач має високу чи не дуже майстерність (а), та в разі, якщо студент має не надто потужні логіку і пам'ять (б)

В разі не надто потужної логіки і пам'яті студента в залежності від майстерності викладача матимемо:

$$\alpha_{11} - \beta_{11} < 0 \tag{18}$$

або

$$\alpha_{11} - \beta_{11} > 0 \tag{19}$$

та

$$\alpha_{22} > \alpha_{21}, \tag{20}$$

а тому особлива точка O_2 знаходитиметься на фазовій площині знову ж таки справа від осі x_2, але в не заштрихованій області на рис. 2б. У цьому випадку особлива точка O_2 не повинна враховуватись під час побудови фазових траєкторій.

Тепер розглянемо визначення особливих точок фазової площини для k-го часового напівінтервалу $[t_2^{(k)})$, протягом якого студент набуває додаткових знань самостійно. Виходячи з системи диференціальних рівнянь (3), для цього випадку система алгебраїчних рівнянь, що необхідна для визначення особливих точок, матиме вигляд

$$\begin{aligned} &-\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2x_1 = 0; \\ &-\alpha_{22}x_2 + \alpha_{21}x_1x_2 + \beta_{22}x_2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Розв’язуючи систему рівнянь (21), знайдемо, що особлива точка O_1, як і у обох попередніх випадках, буде знаходитись у точці фазової площини з координатами, визначеними співвідношеннями (11). Що ж стосується особливої точки O_2, то вона буде мати координати

$$x_1 = \frac{\alpha_{22} - \beta_{22}}{\alpha_{21}}; \;\; x_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}. \tag{22}$$

В разі потужної логіки і пам’яті студента та високого рівня доступності і наочності викладення матеріалу у навчальному посібнику, за яким студент підвищує свій рівень знань самостійно, матимемо:

$$\begin{aligned} &\alpha_{22} - \beta_{22} < 0; \\ &\alpha_{11} < \alpha_{12}, \end{aligned} \tag{23}$$

а в разі «сірого» викладення матеріалу у навчальному посібнику матимемо:

$$\begin{aligned} &\alpha_{22} - \beta_{22} > 0; \\ &\alpha_{11} < \alpha_{12}. \end{aligned} \tag{24}$$

Це означає, що особлива точка O_2 знаходитиметься на фазовій площині зверху від осі x_1 та зліва або справа від осі x_2, тобто в заштрихованій області на рис. 3а.

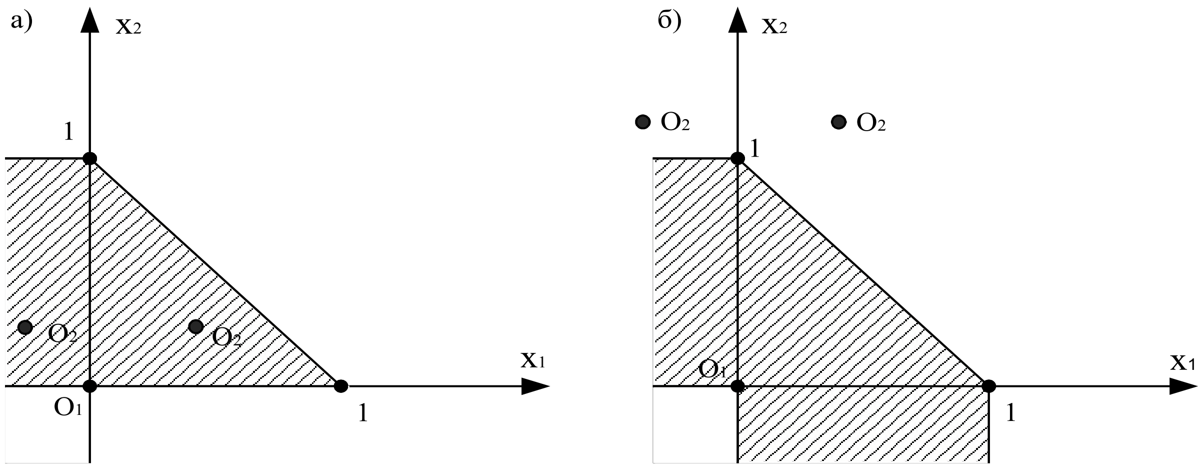

Рис. 3. Допустима область розміщення особливих точок на фазовій площині в разі, якщо студент має потужні логіку і пам’ять, а в навчальному посібнику, за яким студент навчається самостійно, матеріал викладено доступно і наочно чи не надто доступно і наочно (а), та в разі, якщо студент має не надто потужні логіку і пам’ять (б)

В разі не надто потужної логіки і пам’яті студента матимемо:

$$\alpha_{11} > \alpha_{12}, \tag{25}$$

а в залежності від надто зрозумілого та наочного викладання матеріалу в навчальному посібнику —

$$\alpha_{22} - \beta_{22} < 0 \tag{26}$$

чи не надто зрозумілого і наочного —

$$\alpha_{22} - \beta_{22} > 0. \tag{27}$$

Це означає, що особлива точка O_2 знаходитиметься на фазовій площині знову ж таки зверху від осі x_1, але зліва чи справа від осі x_2 у заштрихованій області на рис. 3б. У цьому випадку особлива точка O_2 не повинна враховуватись під час побудови фазових траєкторій.

Висновки

1. Отримано математичні співвідношення для визначення координат особливих точок на фазовій поверхні, що характеризують стани студента, в яких у нього відсутній приріст нових знань з навчальної дисципліни.
2. Наведено змістовну інтерпретацію особливих точок фазової площини і їх координат у термінології процесу вивчення студентом навчальної дисципліни та рекомендації стосовно того, коли і які особливі точки потрібно враховувати під час побудови фазових траєкторій, а коли і які — ні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Б. І. Математичні моделі процесу засвоєння студентом навчальної дисципліни на фазовій площині / Б. І. Мокін, А. В. Пísклярова, Ю. В. Мокіна // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2010. — № 5. — С. 109—112.
2. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. — Киев : Вища школа. — 1984. — 408 с.

Рекомендована Вченою радою науково-дослідного інституту проблем моделювання багатозв’язних систем

Надійшла до редакції 29.09.10
Рекомендована до друку 25.11.10

Мокін Борис Іванович — директор науково-дослідного інституту проблем моделювання багатозв’язних систем;
Пісклярова Анна Валеріївна — проректор з науково-педагогічної роботи по організації виховного процесу;
Мокіна Юлія Вікторівна — доцент кафедри менеджменту та моделювання в економіці.
Вінницький національний технічний університет