

УДК 621.7:519.85

**В. М. Михалевич, д. т. н., проф.;**

**Ю. В. Добранюк, асп.;**

**О. В. Михалевич, студ.**

## НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОПУКЛОСТІ ФУНКЦІЇ ПОШКОДЖЕНЬ ПІД ЧАС НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

*Сформульовано та доведено теорему про необхідні та достатні умови опуклості функції пошкоджень за умови нестационарного деформування. Розглянуто більш загальну модель, в якій траєкторія деформацій в просторі: показник напруженого стану — накопичена пластична деформація, задається параметрично. Продемонстровано приклади застосування теореми та її практичне значення.*

### Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень

Розв'язання задач теорії деформованості вимагає значних обчислювальних витрат [1, 2]. В роботі [3] розроблено ефективну обчислювальну схему для задачі визначення граничних деформацій за умов нестационарного деформування, що відбувається за вісесиметричного осадження циліндричних заготовок за різних умов тертя на торцях. При цьому використовувалася модель, що базується на лінійному принципі накопичення пошкоджень — модель Колмогорова [1—4]:

$$\psi(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c} [\eta(\varepsilon_u)]}, \quad (1)$$

де  $\psi$  — пошкодженість макрочастинки, яка змінюється від 0 в початковому стані до 1 за досягнення граничного стану;  $\varepsilon_u$  — накопичена пластична деформація:

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$\tau$ ,  $t$  — час;  $\dot{\varepsilon}_u$  — інтенсивність швидкостей деформацій;  $\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(\eta)$  — крива граничних деформацій за умови стаціонарного деформування (діаграма пластичності);  $\eta$  — показник напруженого стану [1, 2, 5].

З урахуванням (1), умова досягнення граничного стану набуває вигляду:

$$\psi(\varepsilon_*) = 1 \quad (3)$$

або

$$\int_0^{\varepsilon_*} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c} [\eta(\varepsilon_u)]} = 1, \quad (4)$$

де  $\varepsilon_*$  — гранична деформація за умов немонотонного, зокрема, складного деформування.

Знаходження граничної деформації  $\varepsilon_*$  зводиться до розв'язання нелінійного рівняння (4). Для побудови обчислювальної схеми розв'язання цієї задачі в [3] використано без доведення умову опуклості функції пошкоджень  $\psi(\varepsilon_u)$  на інтервалі  $\varepsilon_u \in (0, \varepsilon_*)$ . В роботі аналітично досліджено функції пошкоджень на предмет визначення необхідних та достатніх умов її опуклості.

Об'єктом дослідження є функція пошкоджень, що описує нестационарні процеси, а предметом дослідження — її властивості.

*Метою дослідження є здобуття необхідних та достатніх умов опуклості функції пошкоджень.*

Задачі дослідження: 1. Постановка задачі. 2. Формулювання та доведення теореми про необхідні та достатні умови опуклості функції пошкоджень. 3. Застосування теореми на конкретних прик-

ладах.

**Основна частина**

Перепишемо загальний вираз (1) у такому вигляді:

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{dz}{f\{y(z)\}}, \tag{5}$$

де  $f(y) > 0$  та  $y(x)$  — неперервні та диференційовні функції.

Область визначення функції  $\psi(x)$ :  $x \in [0, \infty)$ .

Область значень функції  $\psi(x)$ :  $\psi \in [0, \infty)$ .

Використаємо такі означення [6]:

**Означення 1.** Функція  $\phi$  називається опуклою вниз на  $(a; b)$ , якщо

$$\forall \{x_1; x_2\} \subset (a; b) \forall \rho \in [0; 1] : \phi(\rho x_1 + (1 - \rho)x_2) \leq \rho\phi(x_1) + (1 - \rho)\phi(x_2). \tag{6}$$

**Означення 2.** Функція  $\phi$  називається строго опуклою вниз на  $(a; b)$ , якщо

$$\forall \{x_1; x_2\} \subset (a; b) \forall \rho \in [0; 1] : \phi(\rho x_1 + (1 - \rho)x_2) < \rho\phi(x_1) + (1 - \rho)\phi(x_2). \tag{7}$$

Користуватися наведеними означеннями для дослідження опуклості функції на практиці незручно. Наведемо такі ознаки опуклості диференційовних функцій:

1. Для того, щоб функція  $\phi$  була опуклою вниз на  $(a; b)$ , необхідно й достатньо, щоб

$$\forall x \in (a, b) : \phi''(x) \geq 0. \tag{8}$$

2. Для того, щоб функція  $\phi$  була строго опуклою вниз на  $(a; b)$ , необхідно й достатньо, щоб

а) 
$$\forall x \in (a, b) : \phi''(x) > 0; \tag{9}$$

б) не існувало інтервалу  $\{x_1; x_2\} \subset (a; b)$  такого, що

$$\forall x \in \{x_1; x_2\} : \phi''(x) = 0. \tag{10}$$

Для здобуття загальніших співвідношень перейдемо до параметричного подання функції  $y(x)$  в (5):

$$\begin{cases} x = \alpha(t); \\ y = \beta(t); \end{cases} \quad t \in T, \tag{11}$$

тоді (5) набуде такого вигляду:

$$\bar{\psi}(t) = \psi(\alpha(t)) = \int_0^t \frac{\alpha'(\tau) d\tau}{f\{\beta(\tau)\}}. \tag{12}$$

Функція  $\bar{\psi}(t)$  є складеною і тільки в окремому випадку, коли  $\alpha(t) = t$ , матимемо  $\bar{\psi} \equiv \psi$ . Тому умови опуклості формулюватимемо саме для функції  $\bar{\psi}$ .

**Теорема.** *Необхідна умова опуклості функції пошкоджень за умови нестационарності полягає у виконанні, принаймні, однієї з нерівностей:*

$$f'(\beta) \cdot \alpha'(t) \cdot \beta'(t) \leq 0, \quad \alpha''(t) \geq 0, \tag{13}$$

а достатньою умовою є виконання обох цих нерівностей.

*Доведення.* Скористаємося ознаками опуклості диференційовних функцій. Для цього диференціюванням першої рівності в (12) знайдемо першу та другу похідні функції  $\bar{\psi}(t)$ :

$$\bar{\psi}'(t) = \psi'(\alpha) \cdot \alpha'(t); \tag{14}$$

$$\bar{\psi}''(t) = \psi''(\alpha) \cdot (\alpha'(t))^2 + \psi'(\alpha) \cdot \alpha''(t). \tag{15}$$

Диференціюванням (5) отримаємо:

$$\psi'(x) = \frac{1}{f\{y(x)\}}; \tag{16}$$

$$\psi''(x) = -\frac{f'(y) \cdot y'(x)}{f^2\{y(x)\}}. \tag{17}$$

Перепишемо співвідношення (16), (17) з урахуванням параметричного подання функції  $y(x)$  (11):

$$\psi'(x) \equiv \psi'(\alpha) = \frac{1}{f\{\beta(t)\}}; \quad \psi''(x) \equiv \psi''(\alpha) = -\frac{f'(\beta(t)) \cdot \beta'(t)}{f^2\{\beta(t)\} \cdot \alpha'(t)}. \tag{18}$$

Тоді вираз (15) набуде вигляду

$$\bar{\psi}''(t) = -\frac{f'(\beta(t)) \cdot \beta'(t) \cdot \alpha'(t)}{f^2\{\beta(t)\}} + \frac{1}{f\{\beta(t)\}} \cdot \alpha''(t). \tag{19}$$

Зауважимо, що отримане співвідношення можна отримати і безпосереднім диференціюванням визначеного інтеграла в (12).

Необхідна умова виконання першої ознаки опуклості, а саме нерівності

$$\bar{\psi}''(t) \geq 0, \tag{20}$$

згідно з (19), полягає у виконанні, принаймні, однієї з нерівностей (13). Достатньою умовою виконання нерівності (20) є виконання обох нерівностей (13). Теорему доведено.

Застосуємо цю теорему до якісного аналізу задачі визначення граничних деформацій за умов нестационарного деформування. На рис. 1 показано графік до цієї задачі.

Формальне аналітичне дослідження кривої граничних деформацій під час стаціонарного деформування  $f(y)$  може виявитися неелементарним. Але ця крива, звичайно, є апроксимацією експериментальних даних, здебільшого за трьома точками за результатами дослідів на стиск, кручення та розтяг циліндричних зразків [2]. Отже, на основі великої кількості експериментальних даних можна стверджувати, що в переважній більшості випадків, тобто для більшості досліджуваних матеріалів, функція  $f(y)$  є спадною, а саме  $f'(y) < 0$  для всього відрізка значень  $y$ , що становить практичний інтерес. В результаті нерівності (13) набудуть вигляду

$$\alpha'(t) \cdot \beta'(t) \geq 0; \quad \alpha''(t) \geq 0. \tag{21}$$

За означенням функція  $\alpha(t)$  є невід'ємною строго монотонною функцією (див. (2)). Отже, оскільки з умови  $\frac{\alpha'(t)}{\beta'(t)} \geq 0 \Rightarrow \alpha'(t) \cdot \beta'(t) \geq 0$ , то для всіх траєкторій типу траєкторії 2 (див. рис.

1), що мають невід'ємну першу похідну, необхідні умови завжди справджуватимуться.

Розглянемо приклад застосування теореми для аналізу задачі, що розглянута в [3]:

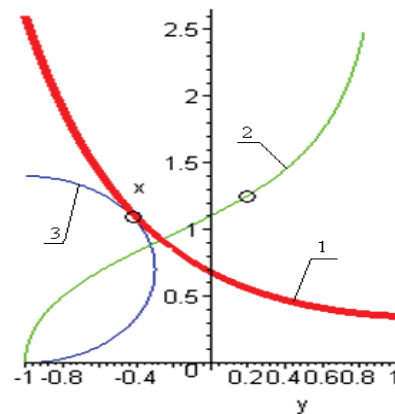


Рис. 1. Траєкторії деформації та граничні деформації:

- 1 — крива граничних деформацій під час стаціонарного деформування ( $x = f(y)$ );
- 2, 3 —  $y(x)$  траєкторії деформацій (21) та (29), відповідно;
- — розрахункові значення граничної накопиченої деформації за відповідними траєкторіями

$$\begin{cases} \alpha(t) = m \cdot \int_0^t \sqrt{3 + \cos^{-4}(\tau)} d\tau; \\ \beta(t) = \frac{1 - 3 \cdot \cos^2(t)}{\sqrt{1 + 3 \cdot \cos^4(t)}}; \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (22)$$

де  $m > 0$  — деяка стала;

$$f(y) = a_2 e^{\left[-y \ln\left(\frac{(1-y)a_1}{2a_2} + \frac{(1+y)a_2}{2a_3}\right)\right]}, \quad y \in [-1, 1], \quad (23)$$

де  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$  — деякі сталі.

З урахуванням останніх двох співвідношень, функція пошкоджень набуває вигляду:

$$\bar{\psi}(t) = m \int_0^t \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(\tau)}}}{(1-3\cos^2(\tau)) \ln \left[ \frac{\left(1 - \frac{1-3\cos^2(\tau)}{\sqrt{1+3\cos^4(\tau)}}\right) a_1}{2a_2} + \frac{\left(1 + \frac{1-3\cos^2(\tau)}{\sqrt{1+3\cos^4(\tau)}}\right) a_2}{2a_3} \right]} a_2 e^{\frac{\sqrt{1+3\cos^4(\tau)}}{\sqrt{1+3\cos^4(\tau)}}} d\tau. \quad (24)$$

Друга похідна від цієї функції надто громіздка та важкодоступна для дослідження та аналізу, що свідчить про необхідність застосування сформульованої теореми.

Знайдемо похідні, що містяться в нерівностях (21):

$$\alpha'(x) = m \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(t)}}; \quad (25)$$

$$\beta'(x) = \frac{6 \cos(t) \sin(t)}{\sqrt{1 + 3 \cos^4(t)}} + \frac{6(1 - 3 \cos^2(t)) \cos^3(t) \sin(t)}{\sqrt{(1 + 3 \cos^4(t))^3}}; \quad (26)$$

$$\alpha''(x) = \frac{2m \sin(t)}{\sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4(t)}} \cos^5(t)} \quad (27)$$

та спростимо (26):

$$\beta'(x) = \frac{6 \cos(t) \sin(t) (1 + \cos^2(t))}{\sqrt{(1 + 3 \cos^4(t))^3}}. \quad (28)$$

Зауважимо, що знаходження похідних та спрощення виконано за допомогою стандартних команд diff та simplify системи символічної математики Maple.

Оскільки для  $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ :  $\sin(t) > 0$ ,  $\cos(t) > 0$ , із (25), (27), (28) очевидно, що на вказаному інтервалі виконуються строгі нерівності

$$\alpha'(t) > 0; \quad \beta'(t) > 0; \quad \alpha''(t) > 0. \quad (29)$$

Отже, згідно з другою ознакою опуклості функція пошкоджень  $\bar{\psi}(t)$  є строго опуклою на інтервалі  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Це свідчить про правомірність застосування комбінованого методу хорд та дотичних [3]. Відповідний графік функції пошкоджень  $\bar{\psi}(t)$ , який підтверджує достовірність теоретичних висновків, показано на рис. 2.

Розглянемо ще один приклад застосування теорему до аналізу функції пошкоджень, яка породжується траєкторію 3 на рис. 1. Ця траєкторія описується такою функцією:

$$\begin{cases} \alpha(t) = 0,7[1 + \sin(t)]; \\ \beta(t) = -1 + 0,7 \cos(t); \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (30)$$

Подібні траєкторії були отримані для випадку радіального обтиснення тіл обертання [2, 7].

Знайдемо похідні:

$$\alpha'(x) = 0,7 \cos(t); \quad (31)$$

$$\alpha''(x) = -0,7 \sin(t); \quad (32)$$

$$\beta(x) = -0,7 \sin(t). \quad (33)$$

Із аналізу отриманих співвідношень випливає, що на інтервалі  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  не справджується жодна з умов (21), тобто необхідні умови опуклості не виконуються. Це означає, що застосовування комбінованого методу хорд та дотичних в цьому випадку вимагає додаткового дослідження для виділення інтервалу, який утримує шукане граничне значення параметра деформування та на якому напрям опуклості функції пошкоджень не змінюється. Графік функції пошкоджень для розглянутої траєкторії, показаний на рис. 2, підтверджує отримані висновки.

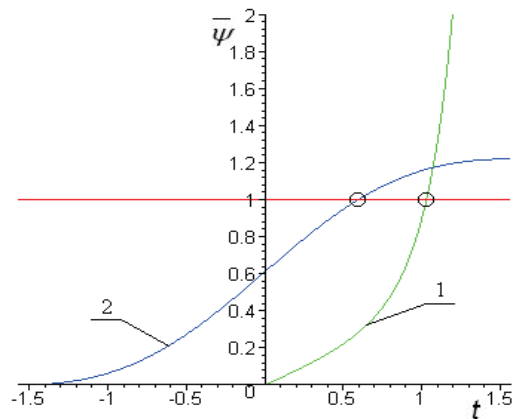


Рис. 2. Функція пошкоджень:

1, 2 — розрахунки за (24) та за (12), (23), (30), відповідно ( $m = 0,5$ ;  $a_1 = 2,6$ ;  $a_2 = 0,68$ ;  $a_3 = 0,35$ );  
○ — розрахункові значення граничної накопиченої деформації за відповідними траєкторіями

### Висновки

Сформульована теорема суттєво спрощує дослідження опуклості функції пошкоджень, що в свою чергу дозволяє розробляти ефективні інформаційні технології розв'язання основної задачі теорії деформованості: визначення граничних деформацій за умов нестационарного деформування.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. — Вінниця : «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1998 — 195 с. — ISBN 966-7199-20-7.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. — К. : УМК ВО, 1989. — 152 с.
3. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — № 2. — Київ : Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. — 2009. — 7 с. — Режим доступу до журн. : [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009\\_2/2009-2.htm](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm).
4. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение / В. Л. Колмогоров. — М. : Металлургия, 1970. — 230 с.
5. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич // Пробл. прочности. — 2003. — № 3. — С. 5—14.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підруч. : у двох частинах. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. — К. : Либідь, 1993. — 320 с.
7. Огородников В. А. Деформируемость металла при ротационном обжатии / В. А. Огородников, Н. А. Шестаков // Изв. вузов : Машиностроение. — 1975. — № 9. — С. 147—152.

Рекомендована кафедрою прикладної математики

Надійшла до редакції 24.12.09  
Рекомендована до друку 28.01.10

**Михалевич Володимир Маркусович** — завідувач кафедри, **Добранюк Юрій Володимирович** — аспірант. Кафедра вищої математики;  
**Михалевич Олексій Володимирович** — студент Інституту інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії.

Вінницький національний технічний університет