

УДК 621.7:519.85

В. М. Михалевич, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. Добрानюк, асп.

МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛУ НА ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЗРАЗКІВ ПІД ЧАС ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ОСАДЖЕННЯ. ЧАСТИНА 2. ВИЗНАЧЕННЯ НАКОПИЧЕНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ТА ІНТЕНСИВНОСТІ ЛОГАРИФМІЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА ОСНОВІ РІЗНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

Детально розглянуто задачу визначення накопиченої деформації за умов складного деформування, що має місце на вільній бічній поверхні під час вісесиметричного осадження циліндричних зразків за різних умов тертя на торцях. Здобуто аналітичні вирази для визначення накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій на основі різних апроксимацій залежності між осьовою та коловою логарифмічними деформаціями. Дано порівняльний аналіз здобутих залежностей та розроблено інформаційні технології визначення деформованого стану матеріалу на вільній бічній поверхні циліндричного зразка під час осадження.

Вступ

Основним завданням цієї роботи є визначення, на підставі побудованих варіантів залежностей між компонентами деформацій, накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій, а також аналітичний аналіз отриманих співвідношень, та розробка деяких рекомендацій зі спрощеного обчислення накопиченої пластичної деформації без істотної втрати точності.

Основна частина

Залежність між осьовою та коловою деформаціями $\varepsilon_z = f(\varepsilon_\phi)$ можна апроксимувати декількома виразами, дослідження яких здійснювалось в частині 1 цієї роботи. Однією із них є апроксимація у вигляді розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними [1]

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{\varepsilon_\phi^2 + m^2}, \quad (1)$$

де $m > 0$ — константа, яка визначається експериментально.

Розв'язком диференціального рівняння (1), з урахуванням початкової умови $\varepsilon_z|_{\varepsilon_\phi=0} = 0$, буде

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_\phi - \frac{3}{2} m \cdot \arctg\left(\frac{\varepsilon_\phi}{m}\right). \quad (2)$$

В частині 1 побудовано також такі апроксимації

$$\varepsilon_\phi = -2\varepsilon_z + 3p \cdot \arctg\left(\frac{\varepsilon_z}{2p}\right); \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_\phi + \frac{3}{2m} \left(e^{-m \cdot \varepsilon_\phi} - 1 \right). \quad (4)$$

Накопичена пластична деформація визначається за відомим співвідношенням [1—4]

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau, \quad (7)$$

де t, τ — час; $\dot{\varepsilon}_u$ — інтенсивність швидкостей деформацій;

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\dot{\varepsilon}_z^2 + \dot{\varepsilon}_z \cdot \dot{\varepsilon}_\phi + \dot{\varepsilon}_\phi^2}; \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{d\varepsilon_z}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}_\phi = \frac{d\varepsilon_\phi}{dt}. \quad (9)$$

Перепишемо співвідношення (7) з урахуванням (8), (9):

$$\varepsilon_u(\varepsilon_\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{\varepsilon_\phi} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi}\right)^2 + \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} + 1} \cdot d\varepsilon_\phi. \quad (10)$$

Переходячи до параметричного подання [1] співвідношення (2), отримаємо

$$\begin{cases} \varepsilon_\phi = m \cdot \operatorname{tg}(x); \\ \varepsilon_z = -\frac{m}{2}(\operatorname{tg}(x) + 3x) \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (11)$$

де x — параметр.

З урахуванням (11), вираз для накопиченої деформації (10) набуває вигляду:

$$\varepsilon_u(x, m) = m \int_0^x \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx. \quad (12)$$

Інтенсивність логарифмічних деформацій

$$e_u(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\varepsilon_z^2(t) + \varepsilon_z(t) \cdot \varepsilon_\phi(t) + \varepsilon_\phi^2(t)} \quad (13)$$

в цьому випадку визначається виразом [4]

$$e_u(x, m) = m \sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3 \cdot x^2}. \quad (14)$$

У роботі [4] показано, що накопичена деформація (7) з точністю до постійного множника дорівнює довжині дуги траєкторії деформацій в координатах $\varepsilon_z, \varepsilon_\phi, \varepsilon_r$, а інтенсивність логарифмічних деформацій (13) дорівнює, з точністю до тієї ж постійної, довжині радіус-вектора кінцевої точки вказаної траєкторії. Строга рівність між вказаними мірами деформацій має місце тільки для прямолінійних траєкторій деформацій. У свою чергу прямолінійні траєкторії породжуються процесами деформування, за яких зі зростанням деформацій відношення приростів деформацій залишаються незмінними [5, 6]. Під час осадження із бочкоутворенням відношення приростів деформацій змінюється і, як було показано, може бути відображено, зокрема, залежністю (1). Відмінність в числових значеннях величин накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій, що визначені на основі експериментальних даних, які розглядаються у цій роботі, показана на рис. 1. Накопичена деформація мало відрізняється від інтенсивності логарифмічних деформацій для значень абсолютної величини осьової деформації, що не перевищує 0,6. Із збільшенням абсолютної величини осьової деформації та зі зменшенням параметра m похибка помітно збільшується. Невелика відмінність між накопиченою деформацією та інтенсивністю логарифмічних деформацій, а також простіший вираз для обчислення останньої, дозволили авторам побудувати апроксимацію для обчислення накопиченої деформації, виражену через елементарні функції [4]

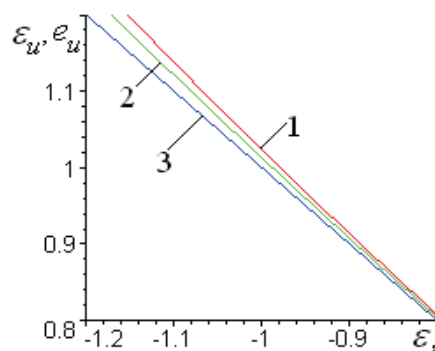
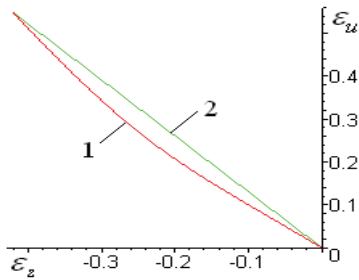
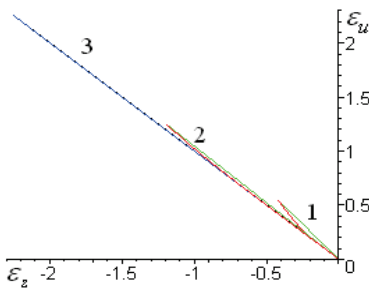


Рис. 1. Залежність накопиченої деформації та інтенсивності логарифмічних деформацій під час осадження від величини осьової деформації ($m = 0,5$): 1 — накопичена деформація (12), 2 — інтенсивність логарифмічних деформацій (14); 3 — ε_z

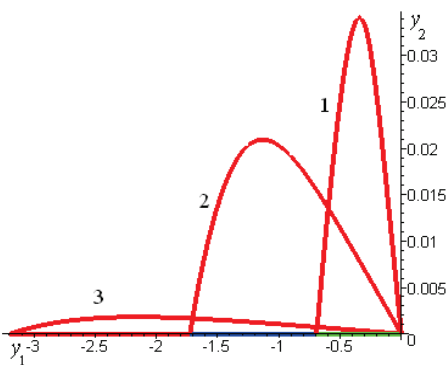
$$m \int_0^x \sqrt{\cos^{-4} x + 3} dx = m \left[\sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3x^2} + h(x - x_0) (0,04305092296(x - x_0) - 0,01108086209(x - x_0)^2 + 0,8263531073(x - x_0)^4 + 0,1620143791(x - x_0)^6) \right]. \quad (15)$$



а)



б)



в)

Рис. 2. Зміна накопиченої пластичної деформації в залежності від осової деформації для різних значень параметра m : а) 1 — розрахунок за (11), (12) ($m = 0,09$); 2 — радіус-вектор; б) 1, 2, 3 — розрахунки за (11), (12) ($m = 0,9$; 0,5; 2 відповідно); в) лінійне перетворення графіків б):
 $y_1 = \epsilon_z \cdot \cos(\alpha) + \epsilon_u \cdot \sin(\alpha)$,
 $y_2 = \epsilon_z \cdot \sin(\alpha) - \epsilon_u \cdot \cos(\alpha)$

Похибка запропонованої апроксимації не перевищує 0,08 % для широкого діапазону зміни параметрів m , x : $m \in [0,01; 20]$, $x \in [0; \pi/2 - 0,05]$.

Виключення із подання накопиченої деформації інтеграла, що не виражається через елементарні функції, необхідне для побудови ефективних схем обчислення граничних деформацій, про що мова піде в наступних повідомленнях.

Слід зазначити, що подання у вигляді елементарної функції правої частини співвідношення (12), що являє собою ззовні негроміздкий вираз, є задачею не елементарною або, в усякому разі, не тривіальною. Це пов'язано з тим, що це співвідношення є функцією двох аргументів, причому за однією зі змінних є розбіжним невластним інтегралом другого роду.

Із даних, які подані на рис. 1, випливає також, що величина накопиченої деформації мало відрізняється і від радіус-вектора в координатах $\epsilon_u - \epsilon_z$. Результати обчислень, показані на рис. 2, можливо допоможуть знайти ще вдаліший вираз, порівняно із (15). Графік, показаний на рис. 2а, продубльований також у збільшеному масштабі на рис. 2б у зіставленні із аналогічними графіками для інших значень параметра m . Для здобуття графіків, які показані на рис. 2в, використовували лінійне перетворення координат $\epsilon_u - \epsilon_z$, що задане матрицею

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де кут повороту координатних осей α визначається для кожної кривої напрямом радіус-вектора її кінцевої точки.

Для визначення накопиченої деформації згідно з апроксимацією (3), подамо це співвідношення в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \epsilon_z = -2ptg(x); \\ \epsilon_\phi = p(4tg(x) - 3x) \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (17)$$

З урахуванням (17) вираз для накопиченої деформації (10) набуває вигляду:

$$\epsilon_u(x, p) = p \int_0^x \sqrt{\left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3\right)^2 + 3} dx,$$

(18)

що еквівалентний за складністю обчислення виразу (12).

На основі апроксимації (4) вираз для обчислення накопиченої деформації набуває вигляду

$$\epsilon_u(\epsilon_\phi, m) = \frac{1}{2m} \left[4 + \ln \left(\frac{1}{3} \frac{\sqrt{1 + 3e^{-2m\epsilon_\phi}} + 1}{3\sqrt{1 + 3e^{-2m\epsilon_\phi}} - 1} \right) - 2\sqrt{1 + 3e^{-2m\epsilon_\phi}} \right]. \quad (19)$$

Не дивлячись на зовні громіздкіший, порівняно із (12), вигляд, обчислення за даним співвідношенням виконуються набагато швидше, оскільки зникає багаторазове числове інтегрування. Зазначимо

також, що в даному випадку, за параметр процесу використовується колова деформація. Якщо перейти до параметричного представлення апроксимації (4)

$$\begin{cases} \varepsilon_\phi = -\frac{\ln(x)}{m}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{2m} [3(x-1) + \ln(x)] \end{cases} \quad x \in (0, 1], \quad (20)$$

то вираз для накопиченої деформації матиме вигляд

$$\varepsilon_u(x, m) = \frac{1}{2m} \left[4 + \ln \left(\frac{1}{3} \frac{\sqrt{1+3x^2} + 1}{3\sqrt{1+3x^2} - 1} \right) - 2\sqrt{1+3x^2} \right]. \quad (21)$$

Перевага останнього співвідношення, порівняно із (19), полягає в простішій залежності від параметра m . Ще важливіше те, що при цьому вираз для показника напруженого стану η не залежить від параметра m , як буде показано в подальших повідомленнях.

Висновок

Математичний апарат, описаний в роботі, покладено в основу розроблених інформаційних технологій експериментально-аналітичного моделювання деформованого стану матеріалу на вільній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження. Запропонована методика може бути покладена в основу побудови моделей для описання ширшого кола процесів, ніж вісесиметричне осадження циліндричних зразків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов / Г. А. Смирнов-Аляев. — М.—Л. : Машгиз, 1961. — 463 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. — К. : УМК ВО, 1989. — 152 с.
3. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добрянюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — № 2. — Київ : Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. — 2009. — 7 с. — Режим доступу до журн. : http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm.
4. Михалевич В. М. Накопичена деформація та інтенсивність логарифмічних деформацій при осадці циліндричних зразків з бочкоутворенням / В. М. Михалевич, Ю. В. Добрянюк // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА — 2009 — № 1(20) — С. 129—134.
5. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич // Пробл. прочности. — 2003. — № 3. — С. 5—14.
6. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. — Вінниця : «УНІВЕРСУМ—Вінниця», 1998 — 195 с. — ISBN 966-7199-20-7.

Рекомендована кафедрою прикладної математики

Надійшла до редакції 23.10.09
Рекомендована до друку 3.10.09.

Михалевич Володимир Маркусович — завідувач кафедри, **Добрянюк Юрій Володимирович** — аспірант.
Кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет