УДК 622.271.001:621.311.1

Б. С. Рогальський, д. т. н., проф.;
Ю. А. Лисогор, бакалавр

МОДЕЛІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОЦІНКИ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ ГІРНИЧИХ ПІДПРИЄМСТВ: МОДУЛЬНИЙ ПІДХІД

Розглянуто моделі сумісної багатопараметричної оцінки визначення та прогнозування електричних навантажень гірничих підприємств, в основу яких покладені модульні підходи з використанням сучасних автоматизованих інформаційних технологій. Модульні підходи будуються на програмних та апаратних принципах.

1. Вступ. Обґрунтування напрямків досліджень

Широко відомі теоретичні дослідження методів оцінки параметрів випадкових величин у фундаментальних областях знань [1, 2, 3]. Відомі також результати оцінки параметрів для гірничих підприємств [4, 5]. Перше джерело [4] — монографія, друге [5] — навчальний посібник. Тут був проведений аналіз відомих статистичних методів визначення та прогнозування електричних навантажень: адаптивних та двох трендових моделей. Перша трендова модель використовувала метод коефіцієнтів темпів росту (МКТР), друга — регресійну модель з використанням методу найменших квадратів (МНК). Було показано, що адаптивні, трендові та регресійні моделі для нестаціонарних часових рядів, характерних для гірничих підприємств, не забезпечують прийнятні результати прогнозування з похибкою ±5 %. Фактичний стан визначення похибок такий, що в гірничих підприємствах вони перевищують 20 % межі. А це, в свою чергу, веде до значних втрат в системах енергопостачання. Наукових публікацій, присвячених дослідженню цих питань в періодичних виданнях явно не достатньо. Фактично для цієї галузі відсутні публікації з сумісних багатопараметричних оцінок випадкових величин. А тому дослідження, що пов'язані з сумісною багатопараметричною оцінкою визначення та прогнозування електричних навантажень гірничих підприємств є актуальною темою.

Один з перспективних методів покращення результатів сумісного багатопараметричного оцінювання визначення та прогнозування електричних навантажень гірничих підприємств є автоматизація проведення наукових досліджень з використанням сучасних інформаційних технологій, побудованих на програмному та апаратному принципах. Програмний принцип передбачатиме використання наявних персональних комп'ютерів (ПК), локальних мереж, всесвітньої мережі Internet з її потужним математичним забезпеченням [3]. Апаратний принцип передбачатиме використання спеціальних обчислювальних пристроїв вмонтованих в системи контролю та автоматизованого управління для вирішення задач підвищення ефективності функціонування промислової системи. Наприклад, вирішення задачі забезпечення відповідного рівня безпеки фірми або підприємства. Розрахунки будуть проведені на прикладі одного із кар'єрів Вінницької області.

2. Методологія дослідження сумісних багатопараметричних оцінок

2.1. Загальні положення методології

Сформулюємо задачу сумісної багатопараметричної оцінки визначення та прогнозування електричних навантажень у загальному вигляді [1, 2, 3]. Причому сумісно будемо досліджувати: параметричні незміщені обґрунтовані ефективні оцінки, імовірнісні оцінки генеральної вибірки, статистичні вибіркові оцінки, оцінки законів розподілу. Дослідження проведено на прикладі статистичних вибірок Гніванського кар'єру для максимальних 30-хвилинних навантажень та визначення продуктивності буріння в четвертому кварталі протягом дев'яти років [4].

Кінцевою метою нашого дослідження, як наголошувалось у вступній частині, є створення окремих взаємопов'язаних між собою моделей-модулів, які будуть реалізовані як у програмному, так і апаратному вигляді для вирішення сформульованих задач, а також конструювання спецпристроїв забезпечення безпеки енергосистеми від несанкціонованого підключення до мережі.

Під параметричною оцінкою будемо розуміти параметри без індексного розкриття їх суті, під якими криються закони розподілу, початкові, центральні моменти, відповідні математичні очікування випадкової величини від нульового до четвертого порядку: математичне очікування випадкової величини, дисперсії, середньоквадратичного відхилення, медіани, коефіцієнта асиметрії (скошеності), коефіцієнта ексцесу (крутості).

Нехай X — випадкова величина, що підпорядковується закону розподілу $F(X, \Theta)$, де Θ — вищезазначений параметр розподілення, числове значення якого невідоме. Дослідити всі параметри генеральної сукупності Θ для прикладних об'єктів неможливо, а тому ці параметри намагаються оцінити по деяких вибірках з генеральної сукупності.

Всяку однозначно визначену функцію результатів спостережень, за допомогою якої судять про значення параметра Θ, будемо називати оцінкою параметра Θ. Розглянемо деяку множину вибірок об'ємом n кожна. Вибіркову оцінку параметра Θ, що обчислена по i-й вибірці, означимо Θ_{ni}. Через те, що склад вибірки випадковий, можна стверджувати, що Θ_{ni} зарання невідоме числове значення, тобто воно є також випадковою величиною.

Відомо [1, 2], що випадкова величина визначається законом розподілу і числовими характеристиками. Тоді і вибіркову оцінку можна описати відповідним законом розподілу і числовими характеристиками.

Для того, щоб відобразити випадковий характер вибірки об'ємом N з генеральної сукупності, позначимо її через $(X_1, X_2, \ldots X_N)$, а вибіркову оцінку параметра Θ — через $\hat{\Theta}_n$. Отже, можна записати

$$\Theta_n = f\left(X_1, X_2, \ldots X_N\right). \tag{1}$$

Вибір оцінки, що дозволяє отримати задовільне наближення оцінюваного параметра є основною нашою задачею. Причому, відмінною рисою запропонованої статті є сумісна багатокритеріальна оцінка цих параметрів. Зазначимо, що термінологічна база цього напрямку досліджень не є встановленою.

Основними властивостями оцінок є: незміщеність, обґрунтованість, ефективність.

Незміщеною оцінкою параметра Θ назвемо математичне очікування $\hat{\Theta}$, яке дорівнює значенню оцінюваного параметра Θ, тобто [1]

$$M\left(\widehat{\Theta}\right) = \Theta. \tag{2}$$

Якщо рівняння (2) не виконується, то оцінка $\widehat{\Theta}_n$ може бути завищеною, або заниженою, тобто

$$M\left(\widehat{\Theta}\right) > \Theta;\ M\left(\widehat{\Theta}\right) < \Theta. \tag{3}$$

Запис (3) цінний тим, що він буде використаний для прийняття рішень в задачах розпізнавання образів електричних навантажень. Умови (3) приводять до систематичних (одного знаку) похибок в оцінці параметра Θ. Іншими словами: незміщеність гарантує відсутність систематичної похибки в оцінці параметрів. Для доведення твердження (2) вчинимо так, нехай вивчається дискретна генеральна сукупність відносно кількісної ознаки X. Генеральною середньою $\overline{x}_\Gamma$ назвемо середнє арифметичне значення ознаки X, що дорівнює $(x_1, x_2, \ldots x_N)$ і матиме вигляд

$$\overline{x}_\Gamma = \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_N\right)/N. \tag{4}$$

Якщо N_1 об'єктів мають значення ознаки x_1; N_2 відповідно — x_2; … N_N відповідно — x_N, причому $(N_1 + N_2 + \ldots + N_N) = N$, то

$$\overline{x}_\Gamma = \left(x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_N N_N\right)/N, \tag{5}$$

тобто генеральна середня є середня арифметична зважена з вагами, що дорівнюють кількості об'єктів з однаковими значеннями ознаки.

В теоретичній статистиці стараються отримати узагальнені результати, у нашому прикладному дослідженні звернемо увагу на те, що з виразу (5) ми можемо отримати оцінки ймовірностей генеральної сукупності таким чином

$$\overline{x}_\Gamma = \left(x_1 N_1/N + x_2 N_2/N + \ldots + x_N N_N/N\right). \tag{6}$$

Для $N \to \infty$ відношення ($N_1/N,\ N_2/N,\ \ldots\ N_N/N$) будуть наближатись до відповідних ймовірностей ($p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_N$), тобто

$$\overline{x}_\Gamma = \left(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_N p_N\right). \tag{7}$$

А (7) не що інше, як математичне очікування кількісної ознаки випадкової величини X

$$M(X) = \overline{x}_\Gamma. \tag{8}$$

2.2. Модель-модуль вибіркової середньої

Тепер займемось оцінкою вибіркової середньої і покажемо, що вона також наближається до незміщеної оцінки параметра (2). Нехай для вивчення закономірностей генеральної сукупності відносно кількісної ознаки X взята вибірка об'ємом n, причому $n<<N$. Вибірковою середньою $\overline{x}_\text{В}$ назвемо середнє арифметичне значень ознаки X об'єктів вибіркової сукупності. Якщо всі об'єкти вибіркової сукупності об'єму n мають різні значення ознаки ($x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$), то за аналогією з (4), отримаємо

$$\overline{x}_\text{В} = \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)/n. \tag{9}$$

Якщо n_1 об'єктів мають значення ознаки x_1; n_2 відповідно — x_2; … n_n відповідно — x_n, причому ($x_1 + x_2 + \ldots x_n) = n$, то

$$\overline{x}_\text{В} = \left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_n n_n\right)/n, \tag{10}$$

тобто вибіркова середня є середньо зважена з вагами, що дорівнюють кількості об'єктів з однаковими значеннями ознаки. Далі за аналогією з (6) отримаємо

$$\overline{x}_\text{В} = \left(x_1 n_1/n + x_2 n_2/n + \ldots + x_n n_n/n\right), \tag{11}$$

де відношення ($n_1/n,\ n_2/n,\ \ldots,\ n_n/n$) будуть оцінками статистичних частостей, які відповідним чином наближаються до оцінок ймовірностей генеральної сукупності, тобто

$$\overline{x}_\text{В} = \left(x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_n p_n^*\right) \text{ —} \tag{12}$$

середньоарифметична оцінка вибіркової сукупності $\overline{x}_\text{В}$. В (12) ($p^*_1,\ p^*_2,\ \ldots,\ p^*_n$) — значення оцінок частостей. Насамкінець покажемо, що математичне очікування середньоарифметичного значення вибірки дорівнюватиме

$$M\left(\overline{x}_\text{В}\right) = M\left(x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_n p_n^*\right) = \overline{x}_\Gamma. \tag{13}$$

***Приклад* 1.** Визначити оцінку генеральної $\overline{x}_\Gamma$ та вибіркової $\overline{x}_B$ середніх значень максимальних 30-хвилинних навантажень Гніванського кар'єру [4]. Випадкові значення подані в табл. 1.

Таблиця 1

Максимальні 30-хвилинні навантаження кар'єру

$x_{i\Gamma} = \left(x_i - \overline{x}_\Gamma\right)$	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3
$x_{i\text{В}} = \left(x_i - \overline{x}_\text{В}\right)$	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Розв'язання. Оцінка генеральної середньої буде дорівнювати

$$\bar{x}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4 .$$

Оцінка вибіркової середньої буде дорівнювати

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2 .$$

Ми підтвердили відомий в теоретичній статистиці результат, що середньоарифметична оцінка вибірки дорівнює середній генеральній сукупності (13) і є оцінкою незміщеною. Отримані моделі незміщеної оцінки математичного очікування ввійдуть як складові модулі в банк моделей і будуть використанні відповідно до потреб сучасних інформаційних технологій.

2.3. Модель-модуль генеральної дисперсії

Для того, щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення, введемо поняття генеральної дисперсії D_{Γ} як середнього арифметичного квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\bar{x}_{\Gamma}$. Якщо всі об'єкти генеральної сукупності об'єму N мають різні значення ознаки (x_1, $x_2, \ldots, x_N$), то

$$D_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}_{\Gamma} \right)^2 \Big/ N . \tag{14}$$

Якщо N_1 об'єктів мають значення ознаки x_1; N_2 відповідно — x_2; … N_N відповідно — x_N, причому ($N_1 + N_2 + \ldots + N_N$) = N, то

$$D_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} N_i \left(x_i - \bar{x}_{\Gamma} \right)^2 \Big/ N . \tag{15}$$

Генеральним середнім квадратичним відхиленням (СКВ) (стандартом) [4, 5] назвемо квадратний корінь з генеральної дисперсії

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} . \tag{16}$$

Приклад 2. Оцінка генеральної дисперсії буде знайдена за даними таблиці 1. Отримаємо її числові значення

$$D_{\Gamma} = \frac{8 \cdot (2-4)^2 + 9 \cdot (4-4)^2 + 10 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{30} = 1{,}8 .$$

Числове значення СКВ (стандарту) [4] буде таким:

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{1{,}8} = 1{,}34 .$$

2.4. Модель-модуль вибіркової дисперсії

Вибірковою дисперсією $D_{\text{В}}$ назвемо середнє арифметичне квадратів відхилення спостережених значень ознаки від їх середнього значення $\bar{x}_{\text{В}}$. По аналогії з (14—16) і відповідними індексами, будемо мати

$$D_B = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}_B \right)^2 \Big/ n ; \tag{18}$$

$$D_B = \sum_{i=1}^{n} n_i \left(x_i - \bar{x}_B \right)^2 \Big/ n ; \tag{19}$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}\,. \tag{20}$$

***Приклад* 3.** Оцінка вибіркової дисперсії буде знайдена аналогічним чином. Використавши числові значення табл. 1 отримаємо

$$D_{\text{В}} = \frac{20\cdot(1-2)^2 + 15\cdot(2-2)^2 + 10\cdot(3-2)^2 + 5\cdot(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1\,.$$

Вибіркове СКВ (стандарт) [4] буде дорівнювати

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{1} = 1\,.$$

В отриманих результатах для моделей-модулів генеральної (14—16), вибіркової (18—20) нічого не стверджується про взаємозв'язок між ними в питанні зміщеності оцінок. А вони якраз є незміщеними оцінками. Результати дослідження цього питання подамо нижче.

2.5. Модель-модуль оцінки генеральної дисперсії за виправленою вибірковою

Нехай з генеральної сукупності в результаті n незалежних спостережень над кількісною ознакою X взята повторна вибірка n зі значеннями ознаки ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Не зменшуючи узагальнення висновків будемо вважати, що всі ці значення різні. Нехай генеральна дисперсія невідома і потрібно її оцінити за даними вибірки. Як стверджувалось, не скорегована вибіркова дисперсія буде давати відносно генеральної дисперсії систематичну занижену похибку. Пояснюється це тим, що вибіркова дисперсія представляє собою якраз зміщену оцінку D_{Γ}. Хоча результат цей в теоретичних і прикладних дослідженнях відомий, але ми будемо претендувати на зв'язність між собою моделей для автоматизованої системи та на елементи методичної новизни, які є прозорими для студентів старших курсів вищих навчальних закладів, і їх можна використати для розрахунків під час виконання курсових та дипломних робіт. Побудуємо такий ланцюг міркувань. Знайдемо математичне очікування вибіркової дисперсії у вигляді

$$M\left[D_{\text{В}}\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\text{В}}\right)\right]^2 \Big/ n\,. \tag{21}$$

Для доповнення (21) до повного квадрату, додамо та віднімемо складову значення середньо арифметичного $\overline{x}_{\Gamma}$ генеральної сукупності, отримаємо

$$\begin{aligned}
M\left[D_{\text{В}}\right] &= M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right) - \left(\overline{x}_{\text{В}} - x_{\Gamma}\right)\right]^2 \Big/ n = \\
&= M\left[\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right)^2 - 2\left(x_i - x_{\Gamma}\right)\left(\overline{x}_{\text{В}} - \overline{x}_{\Gamma}\right) + \left(\overline{x}_{\text{В}} - \overline{x}_{\Gamma}\right)^2\right] \Big/ n = \\
&= M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}_i - \overline{x}_{\Gamma}\right)^2 \Big/ n - 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right)\left(\overline{x}_{\text{В}} - \overline{x}_{\Gamma}\right) \Big/ n + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}_{\text{В}} - x_{\Gamma}\right)^2 \Big/ n\right] = \\
&= M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right)^2 \Big/ n - 2\left(\overline{x}_{\text{В}} - \overline{x}_{\Gamma}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right) \Big/ n + n\left(\overline{x}_{\text{В}} - x_{\Gamma}\right)^2 \Big/ n\right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Останній рядок (22) має три складові. Кожна з складових має свої наслідки, наведемо їх.

Зауважимо, що перша складова (22) це генеральна дисперсія (14)

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{\Gamma}\right)^2 \Big/ n\right] = D_{\Gamma}. \tag{23}$$

Компонента, що знаходиться під знаком суми другої складової (22), це різниця між середньоарифметичною вибіркою та математичним очікуванням генеральної величини. Доведемо це твердження

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_\Gamma\right)/n=\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)/n-n\overline{x}_\Gamma/n=\left(\overline{x}_\text{В}-\overline{x}_\Gamma\right). \quad (24)$$

Третя складова останнього рядка (22), це генеральна дисперсія поділена на кількість вибіркової величини n. Доведемо це твердження

$$\begin{aligned}&D_\Gamma\left(\overline{x}_\text{В}\right)=D_\Gamma\left[\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)/n\right]=\\&=\left[D_\Gamma\left(x_1\right)+D_\Gamma\left(x_2\right)+\ldots+D_\Gamma\left(x_n\right)\right]/n^2=nD_\Gamma/n^2=D_\Gamma/n.\end{aligned} \quad (25)$$

Підставивши результати наслідків (21—23) в останній рядок рівняння (22) отримаємо

$$\begin{aligned}M\left[D_\text{В}\right]&=M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_\Gamma\right)^2/n-2\left(\overline{x}_\text{В}-x_\Gamma\right)\left(x_\text{В}-x_\Gamma\right)+\left(\overline{x}_\text{В}-x_\Gamma\right)^2\right]=\\&=M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_\Gamma\right)^2/n-2\left(x_\text{В}-x_\Gamma\right)^2+\left(x_\text{В}-x_\Gamma\right)^2\right]=\\&=M\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_\Gamma\right)^2/n\right]-M\left(\overline{x}_\text{В}-x_\Gamma\right)^2=D_\Gamma-D_\Gamma/n=\left(n-1\right)/nD_\Gamma.\end{aligned} \quad (26)$$

Передостанній та останній вирази (26) мають для нас велике практичне значення. Прокоментуємо їх окремо

$$M\left[D_\text{В}\right]=\left(n-1\right)/nD_\Gamma. \quad (27)$$

Тобто, модель математичного очікування вибіркової дисперсії не дорівнює оцінюваній генеральній дисперсії і є зміщеною її оцінкою.

$$M\left[D_\text{В}\right]=D_\Gamma-D_\Gamma/n. \quad (28)$$

З рівняння (28) бачимо, що модель вибіркової в середньому менша генеральної на величину D_Γ/n. Практично це означає, що якщо ми проведемо для нашого прикладного об'єкта серію експериментів n, то вибіркові середні будуть коливатись навколо (D_Γ — D_Γ/n), даючи занижену оцінку моделі генеральної дисперсії.

Виправимо модель вибіркової дисперсії так, щоб її математичне очікування було рівним генеральній дисперсії. Помножимо $D_\text{В}$ на дріб (n/n–1), величину зворотну множнику при D_Γ (27). Виконавши цю процедуру програмно чи апаратно, отримаємо «виправлену дисперсію», яку позначають через s^2 [1—3]

$$s^2=\left(n/\left(n-1\right)\right)D_\text{В}=\left(n/\left(n-1\right)\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_\text{В}\right)^2/n=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_\text{В}\right)^2/\left(n-1\right). \quad (29)$$

Виконаємо перевірку адекватності отриманої моделі

$$\begin{aligned}&M\left[s^2\right]=M\left[n/\left(n-1\right)D_\text{В}\right]=\left(n/\left(n-1\right)\right)M\left[D_\text{В}\right]=\\&=\left[\left(n/\left(n-1\right)\right)\left(\left(n-1\right)/n\right)\right]D_\Gamma=D_\Gamma.\end{aligned} \quad (30)$$

Отже, в якості оцінки генеральної дисперсії приймемо виправлену дисперсію s^2 (29). При її виведенні передбачалось, що всі спостережувані значення ознаки — різні. Якщо це не так, тобто значення ознаки x_1 спостерігалось n_1 раз; значення x_2 відповідно — n_2 раз; …; значення ознаки x_n відповідно — n_n раз причому (n_1 + n_2 + ... n_n) = n, то

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_\text{В}\right)^2/\left(n-1\right). \quad (31)$$

Порівнюючи формули (18) та (29) бачимо, що вони відрізняються лише знаменниками і для достатньо великих значень n об'єму вибірки, наближено дорівнюють одна одній.

Для моделі оцінки СКВ генеральної сукупності, відповідно обираємо

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^2 \Big/ (n-1)}; \quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} n_i \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^2 \Big/ (n-1)}\,. \tag{32}$$

2.6. Моделі-модулі оцінки відхилення емпіричного розподілу від нормального

Для оцінки відхилення емпіричного розподілу від нормального, використаємо асиметрію (косість) та ексцес (крутість) [1—3]. Для цього використаємо треті та четверті ступені центральних емпіричних моментів вибіркової випадкової величини. Нагадаємо, що центральним емпіричним моментом порядку k називають середнє значення k-х ступенів відхилення $\left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)$

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^k n_i \big/ n, \tag{33}$$

для модуля $k = 0$ (33) отримаємо

$$m_{k=0} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^0 n_i \big/ n = \sum_{i=1}^{n} n_i \big/ n = 1\,, \tag{34}$$

де n_i/n — відповідні оцінки ймовірностей вибіркової випадкової величини. Для модуля $k = 1$ (33) прийме вигляд

$$m_{k=1} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^1 n_i \big/ n = 0\,, \tag{35}$$

тобто, позитивні та негативні відхилення скомпенсують одне одного і ми отримаємо результат (35). Для модуля $k = 2$ ми провели достатньо прозорі дослідження генеральної (14—16) та вибіркової випадкових величин (18—20), навели результати моделювання оцінки генеральної дисперсії за виправленою вибірковою (21—32). Тобто, для модуля $k = 2$ інформації достатньо. Для модуля $k = 3$ (33), як головний носій інформації поведінки асиметрії (косості), матиме вигляд

$$a_{k=3} = m_{k=3} \big/ \sigma_{\text{B}}^3 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^3 n_i n^{-1} \big/ \sigma_B^3. \tag{36}$$

Тут $a_{k=3}$ – асиметрія (косить) емпіричного розподілу, m_3-центральний емпіричний момент третього порядку. Для модуля $k = 4$, діючи аналогічно, отримаємо оцінки ексцесу (крутості) емпіричного розподілу

$$e_{k=4} = m_{k=4} \big/ \sigma_{\text{B}}^4 - 3\,. \tag{37}$$

Тут $e_{k=4}$ ексцес (косість) емпіричного розподілу; m_4 – центральний емпіричний момент четвертого порядку.

***Приклад* 4.** Знайти числові значення модуля асиметрії та ексцесу емпіричного розподілення. Числові значення подані в таблиці 2.

Таблиця 2.

Значення x_i продуктивності буріння Гніванського кар'єру

x_i	10,2	10,24	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
Частота	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Розв'язання. Складемо розрахункову таблицю 3, в якій графа 8 служить для контролю розрахунків

$$\sum n_i \left(u_i + 1\right)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4\sum n_i u_i^3 + 6\sum n_i u_i^2 + 4\sum n_i u_i + n,$$

де $u_i = \left(x_i - \overline{x}_{\text{B}}\right) \big/ \sigma_{\text{B}}$.

Покажемо результати розрахункової таблиці 3.

Таблиця 3

Продуктивність буріння Гніванського кар'єру

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
10,2	2	–4	-8	32	-128	512	162
10,4	3	-3	-9	27	-81	243	48
10,6	8	-2	-16	32	-64	128	8
10,8	13	-1	-13	13	-13	13	-
11,0	25	0	-46		-286		25
11,2	20	1	20	20	20	20	320
11,4	12	2	24	48	96	192	972
11,6	10	3	30	90	270	810	2560
11,8	6	4	24	96	384	1536	3750
12,0	1	5	5	25	125	625	1296
			103		895		
	$n = 100$		$\sum n_iu_i = 57$	$\sum n_iu_i^2 = 383$	$\sum n_iu_i^3 = 609$	$\sum n_iu_i^4 = 4079$	$\sum n_i(u_i+1)^4 = 9141$

Контроль: $\sum n_i\left(u_i+1\right)^4 = 9141;$

$$\sum n_iu_i^4 + 4\sum n_iu_i^3 + 6\sum n_iu_i^2 + 4\sum n_iu_i + n =$$

$$= 4079 + 4\cdot 609 + 6\cdot 383 + 4\cdot 57 + 100 = 9141.$$

Збіг сум свідчить про те, що розрахунки виконані правильно.
Для даного прикладу було оцінено:

$$M_1^* = 0{,}57;\ M_2^* = 3{,}83;\ D_\text{B} = 0{,}14;\ \text{відповідно, } \sigma_\text{B} = \sqrt{0{,}14} = 0{,}37.$$

Знайдемо умовні моменти третього і четвертого порядків:

$$M_3^* = \sum n_iu_i^3\big/n = 609/100 = 6{,}09;\ M_4^* = \sum n_iu_i^4\big/n = 4079/100 = 40{,}79.$$

Знайдемо центральні емпіричні моменти третього і четвертого порядків:

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_2^*M_1^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right]h^3 = \left[6{,}09 - 3\cdot 3{,}83\cdot 0{,}57 + 2\cdot\left(0{,}57\right)^3\right]\cdot 0{,}2^3 = -0{,}0007;$$

$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_3^*M_1^* + 6M_2^*\left(M_1^*\right)^2 - 3\left(M_1^*\right)^4\right]h^4 =$$

$$= \left[40{,}79 - 4\cdot 6{,}09\cdot 0{,}57 + 6\cdot 3{,}38\cdot\left(0{,}57\right)^2 - 3\cdot\left(0{,}57\right)^4\right]\cdot 0{,}2^4 = 0{,}054.$$

Знайдемо асиметрію і ексцес:

$$a_s = m_3\big/\sigma_\text{B}^3 = -0{,}0007\big/\left(\sqrt{0{,}14}\right)^3 = -0{,}01;$$

$$e_k = m_4 \Big/ \sigma_{\text{В}}^4 - 3 = 0{,}054 \Big/ \left(\sqrt{0{,}14}\right)^4 - 3 = -0{,}24.$$

В прикладах 1—4 отримані числові значення середніх, дисперсій, СКВ, асиметрії, ексцесу для 30-хвилинних максимальних навантажень та продуктивності буріння на Гніванському кар’єрі. Причому, підтверджено, що оцінки випадкових величин по ексцесу та асиметрії відповідають умовам нормального закону розподілу.

3. Висновки

Детально розглянуто моделі сумісної багатопараметричної оцінки визначення та прогнозування електричних навантажень гірничих підприємств, в основу яких покладено модульні підходи з використанням сучасних автоматизованих інформаційних технологій. Модульні підходи будуються на програмних та апаратних принципах. Програмний принцип використовує наявні ПК, локальні мережі, всесвітню мережу INTERNET. Закладені апаратні принципи передбачаються для використання в спеціальних обчислювальних пристроях. Послідовно розглянуто моделі-модулі параметричних незміщених обґрунтованих ефективних оцінок, імовірнісних оцінок генеральної вибірки, статистичних вибіркових оцінок, оцінок законів розподілу. Основні положення підтверджено числовими прикладами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. — М.: Наука, 1971. — 576 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 2003. — 479 с.
3. Сигел Эндрю. Практическая бизнес-статистика: Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. — 1056 с.
4. Рогальський Б. С. Методи визначення і прогнозування електричних навантажень промислових підприємств: Монографія. Вінниця: «Універсум-Вінниця», 1996. — 96 с.
5. Рогальський Б. С. Проблеми енергозбереження, нормування і прогноз електроспоживання (на прикладі гірничих підприемств). — Вінниця: Універсум-Вінниця, 1996. — 150 с.

Рекомендована кафедрою електротехнічних систем електроспоживання та енергозбереження

Надійшла до редакції 4.05.05
Рекомендована до друку 12.05.05

Рогальський Броніслав Станіславович — завідувач кафедри електротехнічних систем електроспоживання та енергозбереження, ***Лисогор Юлія Андріївна*** — студентка Інституту магістратури, аспірантури і докторантури.

Вінницький національний технічний університет