УДК 512. 534. 5

В. Д. Дереч, к. ф-м. н., доц.

ПРО ПЕРЕСТАВНІ КОНГРУЕНЦІЇ

1. Добре відомо, що будь-які дві конгруенції на групі переставні відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. Зрозуміло, що відповідна властивість має місце і для тих алгебричних структур, до складу яких входить групова структура (кільця, поля, модулі і т. ін.) До класу бінарних алгебр з переставними конгруенціями належать також еквазігрупи і скінчені квазігрупи. Що стосується теорії напівгруп, то тут відомі хіба що окремі класи напівгруп з переставними конгруенціями (напівгрупи Брандта, симетричні напівгрупи і інші). Якщо конгруенції напівгрупи утворюють ланцюжок відносно включення, то, очевидно, що будь-які дві конгруенції такої напівгрупи переставні. В статті [1] описано комутативні напівгрупи, решітка конгруенцій яких лінійно впорядкована. В роботі [2] з'ясовується структура комутативних напівгруп з переставними конгруенціями. В тезах [3] анонсована теорема, в якій знайдено структуру конгруенцій скінченої переставної інверсної напівгрупи з нулем. В загальному ж вигляді проблема описування структури напівгруп з переставними конгруенціями залишається відкритою.

В даній статті мова йтиме про фундаментальні інверсні напівгрупи всіх ізоморфізмів між головними ідеалами дерева скінченої довжини. Основним результатом роботи є теореми 2 і 3, в яких знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб напівгрупа $\Phi(T)$ була переставною.

2. Спочатку приймемо основну термінологію і позначення.

Напіврешітку T називають деревом, якщо вона має нуль і будь-який головний ідеал лінійно впорядкований відносно канонічного порядку.

Напіврешітку S називають скінченої довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з S не перевищує числа n.

Нехай S — довільна напіврешітка. Інверсну напівгрупу (відносно звичайної операції суперпозиції) всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки S називають антигрупою і позначають через $\Phi(S)$.

В даній статті мова йтиме виключно про антигрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами дерева T скінченої довжини. Тому надалі символом $\Phi(T)$ позначається саме така антигрупа.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $rank : S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких a і b виконується нерівність $rank(a \cdot b) \leq \min(rank(a), rank(b))$.

Число $rank(x)$ називають рангом елемента x.

Якщо P — впорядкована множина скінченої довжини з 0, то через $h(x)$ будемо позначати висоту елемента x.

Якщо f — функція, то через $pr_1 f$ і $pr_2 f$ позначимо відповідно область визначення і множину значень функції f.

Напівгрупу, на якій будь-які дві конгруенції переставні, назвемо **переставною**.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп і теорії інверсних напівгруп можна знайти в монографіях [4] і [5].

3. В цьому пункті визначимо рангову функцію на антигрупі $\Phi(T)$. Для цього спочатку позначимо кілька найпростіших властивостей функції $h(x)$.

Лема 1. *Нехай E — напіврешітка скінченої довжини. Якщо $a \in E, b \in E$ і $a < b$, то $h(a) < h(b)$.*

Доведення. Очевидно.

Лема 2. *Якщо E — напіврешітка скінченої довжини, то функція $h(x)$ є ранговою.*

Доведення. Оскільки $a \cdot b \leq a$ і $a \cdot b \leq b$ то, за лемою 1, $h(a \cdot b) \leq h(a)$ і $h(a \cdot b) \leq h(b)$ т. б. $h(x)$ — рангова функція.

Лема 3. *Нехай E — напіврешітка скінченої довжини. Якщо $h(a) = k$, де $k \geq 1$, то існує елемент b такий, що $rank(b) = k - 1$.*

Доведення. Нехай $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = a$ — ланцюжок найбільшої довжини, що з'єднує 0 і a. Очевидно, що $h(a_{k-1}) \geq k - 1$. Якщо ж припустити, що $h(a_{k-1}) > k - 1$, то $h(a_{k-1}) \geq k$, отже, $h(a) \geq k + 1$. Протиріччя. Таким чином, $h(a_{k-1}) = k - 1$.

Тепер визначимо ранг на антигрупі $\Phi(E)$, де E — напіврешітка скінченої довжини.

Отже, нехай $f \in \Phi(E)$ і $pr_1 f = aE, pr_2 = bE.$ Оскільки f — ізоморфізм між головними ідеалами aE і bE, то $h(a) = h(b)$.

Означення. Нехай $f \in \Phi(E)$, причому $pr_1 f = aE, pr_2 = bE.$ Тоді, за означенням, $rank(f) = h(a) = h(b)$.

Лема 4. *Функція $rank$, що визначена на антигрупі $\Phi(E)$, є ранговою.*

Доведення. Нехай f і φ — довільні елементи антигрупи $\Phi(E)$, Існує елемент $r \in E$, такий, що $pr_2(f \circ \varphi) = rE.$ Оскільки для деякого $k \in E$ виконується $pr_2(f \circ \varphi) \subseteq pr_2(\varphi) = kE$, то $r \in kE.$ Отже, $r \leq k$, а тому, за лемою 1, $h(r) \leq h(k)$. Таким чином, $rank(f \circ \varphi) = h(r) \leq h(k) = rank(\varphi)$. Аналогічно доводиться, що $rank(f \circ \varphi) \leq rank(f)$. Отже, $rank$ — рангова функція на $\Phi(E)$.

4. Відомо ([2], теорема 4), що в напівгрупі з переставними конгруенціями, ідеали лінійно впорядковані відносно включення. Обернена теорема не виконується. Як контрприклад можна розглянути триелементну лінійно впорядковану напіврешітку.

Яка структура ідеалів антигрупи $\Phi(T)$? Відповідь на це питання дає теорема 1.

Теорема 1. *Будь-який ідеал антигрупи $\Phi(T)$ є ранговим, тобто має форму $I_k = \{ f \in \Phi(T) | rank(f) \leq k \}$.*

Доведення. Нехай A — довільний ідеал антигрупи $\Phi(T)$. Нехай елемент $f \in A$ найбільшого рангу серед усіх елементів ідеалу A. Позначимо $rank(f)$ через k. Покажемо, що $A = I_k$. Нехай $\varphi \in \Phi(T)$ і $rank(\varphi) = k$. Легко зрозуміти, що знайдуться елементи ψ і $\rho \in \Phi(T)$ такі, що $pr_1\psi = pr_1\varphi;$ $pr_2\psi = pr_1 f$ і $pr_1\rho = pr_2 f;$ $pr_2\rho = pr_2\varphi.$ Тоді $\psi \circ f \circ \rho = \varphi$, а, отже, $\varphi \in A$.

Аналогічно можна довести, що будь-який елемент μ, ранг якого менший k, належить A. Таким чином, $A = I_k$.

Наслідок. Ідеали антигрупи $\Phi(T)$ утворюють ланцюжок.

5. В цьому пункті доведемо основну теорему статті. Для цього нам знадобляться кілька лем.

Лема 5. *Нехай $f \in \Phi(T)$. Якщо $\overline{f} \subseteq f$ і $pr_1\overline{f} = bT$ для деякого $b \in T$, то $\overline{f} \in \Phi(T)$.*

Доведення. Оскільки f — ізоморфізм між головними ідеалами дерева T, то $(bT)\overline{f} = (bT)f = (bf)T = \left(b\overline{f}\right)T.$ Тобто $pr_2\overline{f} = \left(b\overline{f}\right)T.$ Але $\left(b\overline{f}\right)T$ — головний ідеал антигрупи T.

Крім того, $\overline{f}$ — строго монотонна функція. Отже, $\overline{f}$ — ізоморфізм між головними ідеалами bT і $\left(b\overline{f}\right)T$, тому $\overline{f} \in \Phi(T)$.

Лема 6. *Якщо* $f \in \Phi(T)$ *і* $\varphi \in \Phi(T)$ *і* $af = a\varphi$ *, то для будь-якого* $x \in aT$ *виконується рівність* $xf = x\varphi$.

Доведення. Позначимо через $\overline{f}$ і $\overline{\varphi}$ обмеження функцій f і φ на ідеалі aT. Тоді, за лемою 5, $\overline{f} \in \Phi(T)$ і $\overline{\varphi} \in \Phi(T)$. Оскільки $pr_1\overline{f} = pr_1\overline{\varphi}$ і $pr_2\overline{f} = pr_2\overline{\varphi}$, то $\overline{f} = \overline{\varphi}$. Отже, для будь-якого $x \in aT$, $x\overline{f} = x\overline{\varphi}$. Звідси і $xf = x\varphi$.

Лема 7. *Нехай* $f \in \Phi(T)$ *і* $\varphi \in \Phi(T)$. *Якщо* $f \subseteq \varphi$ *і* $pr_1 f = pr_1\varphi$ *, то* $f = \varphi$.

Доведення. Достатньо довести, що $pr_2 f = pr_2\varphi$. Оскільки $f \subseteq \varphi$, то $pr_2 f \subseteq pr_2\varphi$. Припустимо, що $pr_2 f \subset pr_2\varphi$ (строге включення). Тоді існує елемент c такий, що $c \in pr_2\varphi$ і $c \notin pr_2 f$. Отже, існує $a \in pr_1\varphi$ такий, що $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \varphi$. Оскільки $pr_1 f = pr_1\varphi$, то $a \in pr_1 f$. Отже, існує $k \in T$ такий, що $\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \in f$. Але $f \subseteq \varphi$, тому $\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \in \varphi$. Таким чином, $\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \in \varphi$ і $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \varphi$. Звідси випливає, що $k = c$. Але $k \in pr_2 f$, тому $c \in pr_2 f$. Протиріччя.

Лема 8. *Якщо* $f \in \Phi(T)$ *і* $\varphi \in \Phi(T)$, *причому* $f \subset \varphi$ *(строге включення), то* $rank(f) < rank(\varphi)$.

Доведення. Зрозуміло, що $pr_1 f \subseteq pr_1\varphi$. Якщо припустити, що $pr_1 f = pr_1\varphi$, то, за лемою 7, $f = \varphi$. Протиріччя. Тому $pr_1 f \subset pr_1\varphi$ (строге включення). Якщо $pr_1 f = aT$ і $pr_1\varphi = bT$, то $aT \subset bT$ (стороге включення). Звідси $a < b$, тому $h(a) < h(b)$ а, отже, з означення рангу випливає, що $rank(f) < rank(\varphi)$.

Лема 9. *Якщо* $f \in \Phi(T)$ *і* $\varphi \in \Phi(T)$ *, то* $f \cap \varphi \in \Phi(T)$.

Доведення. Множину $\left\{ x \in T \middle| (\exists y)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f \cap \varphi\right)\right\}$ позначимо через Z. Оскільки $0 \in Z$, то $Z \neq \varnothing$. З включення $f \cap \varphi \subseteq f$ випливає, що $pr_1\left(f \cap \varphi\right) \subseteq pr_1 f$. Оскільки $pr_1 f$ — лінійно впорядкована множина і, очевидно, $Z \subseteq pr_1\left(f \cap \varphi\right)$, то Z — лінійно впорядкована множина. Отже, в Z існує найбільший елемент a. З означення множини Z випливає, що існує елемент $b \in T$ такий, що $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in f \cap \varphi$. Таким чином, $af = a\varphi = b$. За лемою 6, для будь-якого $x \in aT$ виконується рівність $xf = x\varphi = y$. Отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f \cap \varphi$ тобто $x \in pr_1\left(f \cap \varphi\right)$. Таким чином, $pr_1\left(f \cap \varphi\right) = aT$. Далі, оскільки $f \cap \varphi \subseteq f$ і $pr_1\left(f \cap \varphi\right) = aT$, то, за лемою 5, $f \cap \varphi \in \Phi(T)$.

Лема 10. *Нехай* $f \in \Phi(T)$ *і* $\varphi \in \Phi(T)$. *Якщо* $rank(f) = rank(\varphi) = k$ *і* $f \neq \varphi$*, то* $rank(f \cap \varphi) < k$.

Доведення. По-перше, $f \cap \varphi \subseteq f$. Якщо припустити, що $f \cap \varphi = f$, то $f \subseteq \varphi$. Оскільки, за умовою, $f \neq \varphi$, то $f \subset \varphi$. Тоді, за лемою 8, $rank(f) < rank(\varphi)$. Протиріччя. Отже, $f \cap \varphi \neq f$, тобто $f \cap \varphi \subset f$ (строге включення), тому, за лемою 8, $rank(f \cap \varphi) < rank(f) = k$.

Лема 11. *Нехай* $f_1, f_2, \varphi \in \Phi(T)$. *Якщо* $f_1 \subseteq \varphi$ *і* $f_2 \subseteq \varphi$*, причому* $rank(f_1) = rank(f_2)$, *то* $f_1 = f_2$.

Доведення. $pr_1\varphi$ і $pr_2\varphi$ — головні ідеали дерева T. З означення дерева випливає, що кожний головний ідеал — лінійно впорядкована множина. Нехай $pr_1 f_1 = aT$ і $pr_1 f_2 = bT$. Оскільки $a \in pr_1\varphi$ і $b \in pr_1\varphi$, то $a \leq b$ або $b \leq a$. Якщо припустити, що $a < b$ $(b < a)$, то

$h(a) < h(b)$ $(h(b) < h(a))$. Отже, $rank(f_1) \neq rank(f_2)$. Протиріччя. Таким чином, $a = b$ і $aT = bT$.

Аналогічно доводиться, що $pr_2 f_1 = pr_2 f_2$. Очевидно, що існує лише один ізоморфізм між лінійно впорядкованими множинами $pr_1 f_1$ і $pr_2 f_1$. Тобто $f_1 = f_2$.

Теорема 2. *Нехай T — дерево, довжина якого не менша 2, тоді антигрупа $\Phi(T)$ не переставна.*

Позначимо через k довжину дерева T. За умовою $k \geq 2$. Визначимо дві конгруенції на антигрупі $\Phi(T)$. Через Σ позначимо конгруенцію Ріса, що визначається ідеалом $I_{k-1} = \{ f \in \Phi(T) | rank(f) \leq k-1 \}$.

Тепер побудуємо ще одну конгруенцію. Для цього визначимо два бінарних відношення на антигрупі $\Phi(T)$. А саме:

$$\omega = \{ \langle f, \varphi \rangle \in \Phi(T) | f \subset \varphi,\, rank(f) = k-1,\, rank(\varphi) = k \} \text{ і}$$

$$\rho = \{ \langle f, \varphi \rangle \in \Phi(T) |\; rank(f \cap \varphi) = k-1,\, rank(f) = rank(\varphi) = k \}.$$

Позначимо через Θ бінарне відношення $\Delta \cup \omega \cup \omega^{-1} \cup \rho$, де Δ — відношення рівності.

Покажемо, що Θ — конгруенція на антигрупі $\Phi(T)$. Рефлексивність і симетричність очевидні. Доведемо, що Θ — транзитивне бінарне відношення. Для цього розглянемо всі можливі випадки.

1-й випадок. $\langle f_1, \varphi_1 \rangle \in \omega$ і $\langle \varphi_1, f_2 \rangle \in \omega^{-1}$.

Тоді $\langle f_2, \varphi_1 \rangle \in \omega$. Оскільки $f_1 \subseteq \varphi_1$ і $f_2 \subseteq \varphi_1$ і $rank(f_1) = rank(f_2)$, то, за лемою 11, $f_1 = f_2$.

2-й випадок. $\langle \varphi_1, f_1 \rangle \in \omega^{-1}$ і $\langle f_1, \varphi_2 \rangle \in \omega$.

Тоді $f_1 \subset \varphi_1$ і $f_1 \subset \varphi_2$, причому $rank(\varphi_1) = rank(\varphi_2) = k$. Якщо $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in \Theta$. Якщо ж $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то, за лемою 10, $rank(\varphi_1 \cap \varphi_2) < k$. Крім того $f_1 \subseteq \varphi_1 \cap \varphi_2$. Якщо припустити, що $f_1 \subset \varphi_1 \cap \varphi_2$ (строге включення), то, за лемою 2, $rank(f_1) < rank(\varphi_1 \cap \varphi_2)$. З останньої нерівності випливає, що $k-1 < rank(\varphi_1 \cap \varphi_2) < k$. Протиріччя. Отже, $f_1 = \varphi_1 \cap \varphi_2$. Таким чином, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in \rho \subset \Theta$.

3-й випадок. $\langle f, \varphi \rangle \in \omega$ і $\langle \varphi, \psi \rangle \in \rho$.

Оскільки $f \subset \varphi$ і $\varphi \cap \psi \subset \varphi$, крім того, $rank(f) = rank(\varphi \cap \psi) = k-1$, то, за лемою 11, $f = \varphi \cap \psi$. Отже, $f = \varphi \cap \psi \subset \psi$ і $rank(f) = k-1$. Таким чином, $\langle f, \psi \rangle \in \omega \subset \Theta$.

4-й випадок. $\langle f, \varphi \rangle \in \rho$ і $\langle \varphi, \psi \rangle \in \rho$.

Якщо $f = \psi$, то $\langle f, \psi \rangle \in \Theta$.

Нехай тепер $f \neq \psi$. Оскільки $f \cap \varphi \subset \varphi$ і $\varphi \cap \psi \subset \varphi$ і, крім того, має місце рівність $rank(f \cap \varphi) = rank(\varphi \cap \psi)$ то, за лемою 11, $f \cap \varphi = \varphi \cap \psi$. З останньої рівності випливає

$$f \cap \varphi \cap \psi = \varphi \cap \psi\,. \tag{1}$$

Оскільки $f \neq \psi$ і строгі включення $f \subset \psi$ або $\psi \subset f$ неможливі, то $f \cap \psi \subset f$ (строге включення). Тоді, за лемою 8, $rank(f \cap \psi) < rank(f)$, а, отже, $rank(f \cap \psi) < k$. Якщо припустити, що $rank(f \cap \psi) < k-1$, то, враховуючи включення $f \cap \varphi \cap \psi \subseteq f \cap \psi$ і рівність (1), робимо висновок, що $rank(\varphi \cap \psi) < k-1$. Протиріччя. Таким чином, $rank(f \cap \psi) = k-1$. Отже, $rank(f) = rank(\psi) = k$ і $rank(f \cap \psi) = k-1$. Це і означає, що $\langle f, \psi \rangle \in \rho \subset \Theta$.

5-й випадок. $\langle f, \varphi \rangle \in \rho$ і $\langle \varphi, \psi \rangle \in \omega^{-1}$.

Тоді $\langle\psi,\varphi\rangle\in\omega$, а отже, $\psi\subset\varphi$. Крім того, $f\cap\varphi\subset\varphi$. Оскільки $rank(\psi)=rank(f\cap\varphi)=k-1$, то, за лемою 11, $f\cap\varphi=\psi$. Враховуючи співвідношення $\psi=f\cap\varphi\subset f$, робимо висновок, що $\langle f,\psi\rangle\in\omega^{-1}$.

Ми розглянули всі можливі випадки. Отже, відношення Θ — транзитивне. Таким чином, враховуючи рефлексивність і симетричність цього відношення, робимо висновок, що Θ — еквівалентність.

Доведемо тепер двосторонню стабільність еквівалентності Θ. Спочатку покажемо лівосторонню стабільність відношення $\Delta\cup\omega$.

Отже, нехай $\langle f,\varphi\rangle\in\omega$.

Випадок А. $\psi\in\Phi(T)$ такий, що $pr_2\psi=pr_1\varphi$.

Легко перевірити, що мають місце рівності $pr_2(\psi\circ\varphi)=pr_2\varphi$ і $pr_2(\psi\circ f)=pr_2 f$. Оскільки $rank(\varphi)=k$ і $rank(f)=k-1$, то $rank(\psi\circ\varphi)=k$ і $rank(\psi\circ f)=k-1$. Крім того, $\psi\circ f\subset\psi\circ\varphi$. Отже, $\langle\psi\circ f,\ \psi\circ\varphi\rangle\in\omega$.

Випадок В. Нехай $\psi\in\Phi(T)$ такий, що $pr_2\psi\neq pr_1\varphi$.

Тоді $pr_2(\psi\circ\varphi)\subset pr_2\varphi$ (строге включення). Оскільки $f\subset\varphi$ і $rank(f)=k-1$, то $pr_2(\psi\circ\varphi)\subseteq pr_2 f$. Звідси легко одержати рівність $\psi\circ f=\psi\circ\varphi$. Отже, $\langle\psi\circ f,\ \psi\circ\varphi\rangle\in\Delta\subset\Theta$.

Міркуючи цілком аналогічно, можна довести правосторонню стабільність відношення $\Delta\cup\omega$.

Двостороння стабільність бінарного відношення $\Delta\cup\omega^{-1}$ легко випливає з відповідної властивості відношення $\Delta\cup\omega$.

Таким чином, ми обґрунтували двосторонню стабільність бінарного відношення $\Delta\cup\omega\cup\omega^{-1}$.

Легко показати, що бінарне відношення Θ є транзитивним замиканням відношення $\Delta\cup\omega\cup\omega^{-1}$. Відомо, що транзитивне замикання стабільного бінарного відношення є стабільним. Двостороння стабільність відношення $\Delta\cup\omega\cup\omega^{-1}$ доведена. Таким чином, Θ — конгруенція на антигрупі $\Phi(T)$.

Покажемо тепер, що конгруенції Θ і Σ (означення дивись вище) не переставні. Дійсно, нехай $\langle f,\ \varphi\rangle\in\omega$. Тоді $\langle 0,\ f\rangle\in\Sigma$. Отже, $\langle 0,\ \varphi\rangle\in\Sigma\circ\Theta$. Припустимо, що $\langle 0,\ \varphi\rangle\in\Theta\circ\Sigma$, тоді існує $\psi\in\Phi(T)$ такий, що $\langle 0,\ \psi\rangle\in\Theta$ і $\langle\psi,\ \varphi\rangle\in\Sigma$. Але з $\langle 0,\ \psi\rangle\in\Theta$ випливає, що $0=\psi$. Отже, $\langle 0,\ \varphi\rangle\in\Sigma$. Протиріччя.

Наступна теорема є прямим наслідком щойно доведеної.

Теорема 3. *Антигрупа* $\Phi(T)$ *переставна тоді і тільки тоді, коли довжина дерева* T *не перевищує* 1.

Доведення. Нехай антигрупа $\Phi(T)$ переставна, тоді за теоремою 2, довжина дерева T не більша за 1.

Навпаки. Нехай довжина дерева T не більша за 1. Якщо його довжина дорівнює 0, то антигрупа $\Phi(T)$ — одноелементна. Якщо ж довжина дерева T дорівнює 1, то, як легко показати, $\Phi(T)$ буде напівгрупою Брандта. Відомо, що напівгрупа Брандта переставна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France. — 1969 — V. 97. — P. 369—380.

2. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups// Semigroup Forum. — 1975. — V. 10, № 1. — P. 55—66.

3. Дереч В. Д. Про напівгрупи з переставними конгруенціями // 5-та міжнародна наукова конференція ім. ак. Кравчука. Тези доповідей. — Київ, 1996. — С. 119.

4. Petrich M. Inverse semigroups. — New York e. a.: John Willey and Sons, 1984. — 674 p.

5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2-х т. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 286 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 03.06.03
Рекомендована до друку 29.03.03

Дереч Володимир Дмитрович **—** доцент кафедри вищої математики.
Вінницький національний технічний університет