УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький[1]

ЗАКОН ПЕРЕТВОРЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЯДУ ФУР'Є ПРИ ВІДОБРАЖЕННІ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ В РОЗРИВНУ ПЕРШОГО РОДУ

[1]Вінницький національний технічний університет

Досліджено окремі властивості нескінченновимірного лінійного гільбертового простору 2π-періодичних функцій, побудованого над множиною дійсних чисел, із заданим в ньому скалярним добутком двох функцій. У зв'язку з цим, визначено закон перетворення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є при трансформації неперервної на періоді функції в розривну першого роду. Для розв'язання поставленої задачі використано окремі класичні положення математичного та функціонального аналізів. В процесі розв'язання задачі доведено, що зазначений математичний закон має складну структуру і є композицією двох множинних законів відображення. Для розкриття першого закону здійснено альтернативне розкладання розривної функції в тригонометричний ряд Фур'є з використанням базису, де за орти слугують розривні тригонометричні функції з ортогонального базису вихідної неперервної функції. Бієктивне зіставлення сформованих особливим чином підмножин з множини отриманих за такого підходу коефіцієнтів Фур'є з коефіцієнтами Фур'є, визначеними для тієї ж розривної функції, але в традиційний спосіб, дозволив аналітично розкрити і другий із законів відображення. Для зручності сприйняття інтерпретацію кожного з математичних законів відображення та їх композицію представлено не тільки в аналітичній, але і в графічній формах подання. Зазначена математична задача постає і потребує свого розв'язання насамперед під час проведення спектрального аналізу періодичного руху континуальних фізичних і технічних динамічних систем при перериванні та дискретизації їхнього руху в просторі та часі. Отримані розв'язки виявляють себе як математичні моделі, які дозволяють перетворювати параметри неперервного руху в перервний без здійснення операції інтегрування, тобто у прямий спосіб, що є перевагою запропонованого підходу порівняно з вже відомими. Самі ж математичні моделі на сьогодні є затребуваними в численних додатках та інноваціях не тільки інформаційних, але і, головним чином, силових технічних систем довільної фізичної природи, що незаперечно свідчить про актуальність розв'язуваної задачі та її практичну доцільність.

Ключові слова: спектральний аналіз, гільбертів простір, ортогональний базис функцій, тригонометричний ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є, неперервна та розривна функції, теоретична електротехніка.

Вступ

Знайдемо математичний закон перетворення $L: F(f) \to F^*\left(f^*\right)$ коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ за умови послідовного переміщення *функціональної точки* (рис. 1) в лінійному гільбертовому просторі 2π-періодичних дійсних функцій з деякого початкового положення, якому відповідає неперервна на періоді функція f з коефіцієнтами Фур'є $F(f)$, в кінцеве положення, де інша функція f^*, вже з власними коефіцієнтами Фур'є $F^*\left(f^*\right)$, утворює на 2π-періоді область $[\theta_1, \theta_2]$, в межах якої функція f^* є *тотожною* до вихідної функції f, а поза її межами — *дорівнює нулю* (рис. 2):

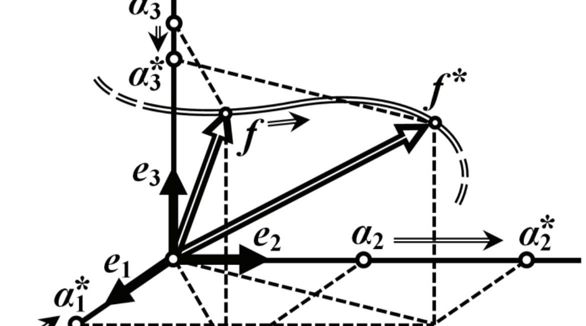

Рис. 1. Геометрична інтерпретація руху функціональної точки в гільбертовому просторі функцій на прикладі евклідового простору з ортонормованим базисом та перетворення коефіцієнтів Фур'є, що супроводжує цей рух

© Ю. Г. Ведміцький, 2018

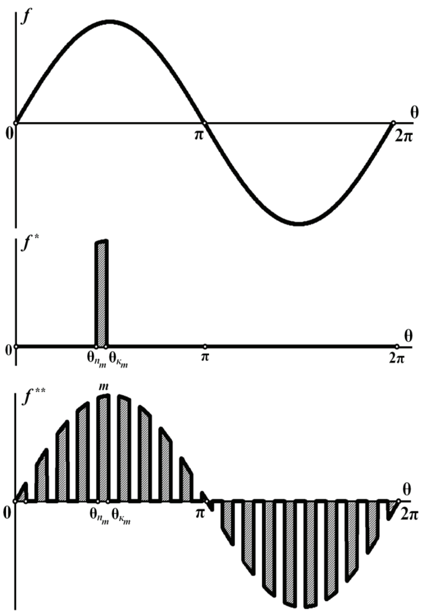

Рис. 2. Приклад відображення неперервної на періоді функції f в розривну першого роду f^* та узагальнений характер останньої як основи в побудові класу кусково-неперервних 2π-періодичних функцій f^{**}

$$f^*(\theta)=\begin{cases}0,\ 0\le\theta<\theta_1;\\ f(\theta),\ \theta_1\le\theta\le\theta_2;\\ 0,\ \theta_2<\theta\le 2\pi,\end{cases} \tag{1}$$

в загальному випадку, утворюючи два розриви першого роду з наразі довільними в межах періоду значеннями θ_1 та θ_2.

Вибір зазначеної функції f^* не є випадковим, оскільки така функція виявляє себе як *аналітична основа* в побудові низки важливих класів кусково-неперервних 2π-періодичних функцій f^{**}. Для прикладу, на рис. 2 показано один з таких класів, функції якого мають кінцеву кількість p пар розривів першого роду і утворюють на 2π-періоді послідовність довільних проміжків $\left[\theta_{1_m},\theta_{2_m}\right]$, в межах яких кожне зі значень функції f^{**} строго дорівнює відповідному значенню вихідної функції f, а поза їх межами — нулю. В цьому випадку

$$f^{**}=\sum_{m=1}^{p} f_m^*=\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{m,k}^* s_k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{p}\alpha_{m,k}^* s_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{**} s_k, \tag{2}$$

а коефіцієнти Фур'є

$$\alpha_k^{**}=\sum_{m=1}^{p}\alpha_{m,k}^*,\ k=1,2,... \tag{3}$$

Відтак, у разі тригонометричного ряду Фур'є розв'язок наведеної задачі доповнить теоретичний базис *спектрального методу* аналізу еволюційного руху континуальних фізичних і технічних динамічних систем в просторі та часі допоки відсутніми математичними моделями, які будуть здатними у *прямий спосіб* (без здійснення операції інтегрування) через коефіцієнти Фур'є неперервних функцій (що за умовою задачі мають бути вихідними і заздалегідь відомими) розраховувати коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є для функцій, які описують вищезазначений рух систем, але вже в умовах його переривання або дискретизації. На сьогодні такі математичні моделі є затребуваними в численних додатках та інноваціях, наприклад, в технічних системах сучасної силової та інформаційної електроніки, електротехніки, радіотехніки, автоматики, електромеханіки, робототехніки, що незаперечно свідчить про актуальність розв'язуваної задачі та її практичну доцільність [1]—[9].

Відтак, розв'язання сформульованої вище математичної задачі *поставимо за мету* цього аналітичного дослідження і для досягнення цієї мети, природно, скористаємося традиційними засобами, серед яких є окремі базові положення математичного та функціонального аналізів.

Розв'язання задачі

Надалі розглядатимемо лише 2π-періодичні функції з локальної області $\mathfrak{R}([0,2\pi],\mathrm{R})\subset S$ лінійного простору S, заданого над полем дійсних чисел R, зі скалярним для двох довільних з простору функцій $f(\theta)$ та $g(\theta)$ добутком

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta. \tag{4}$$

1. Отже, вихідною 2π-періодичною функцією, яка визначає початковий стан функціональної точки в просторі S, є довільна функція f, що задовольняє умови Діріхле і з-поміж інших функцій заданого простору вирізняється повнотою неперервності по усій області свого визначення.

Розкладаємо зазначену функцію f по системі ортогональних базисних функцій, подаємо тригонометричний ряд Фур'є у вигляді

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{m_k} \sin\left(k\theta + \psi_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\theta), \tag{5}$$

де за незалежну змінну слугує кут $\theta = \omega t$. В свою чергу, t — час перебігу періодичного процесу в системі, а ω — кутова частота.

Коефіцієнти Фур'є в однойменному тригонометричному ряді (5) функції f визначаємо на підставі співвідношень

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta;\quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\,d\theta;\quad B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\,d\theta, \tag{6}$$

де $k = 1, 2, \ldots$.

В спектральних гармоніках $f_k(\theta)$ з формули (5)

$$f_0(\theta) = A_0;\quad f_k(\theta) = F_{m_k}\sin\left(k\theta + \psi_k\right) \tag{7}$$

амплітуду кожної k-ї гармоніки f_k функції f (окрім нульової) розраховуємо за формулою

$$F_{m_k} = \sqrt{\left(A_k\right)^2 + \left(B_k\right)^2}\,, \tag{8}$$

а її початкову фазу

$$\psi_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{A_k}{B_k},\ B_k \geq 0; \\ \pm\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{A_k}{B_k},\ B_k < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Автор наразі змушений обґрунтувати *істинність* формул (8) та (9). До цього спонукає поширена практика їх інтерпретації в окремих *авторитетних* джерелах, яка, несподівано для автора, засвідчила, що доволі часто під час визначення порядку математичних дій над коефіцієнтами A_k і B_k в зазначених вище джерелах, на превеликий жаль, припускаються помилок. Для доведення (8) та (9) варто скористатися, знову ж таки, традиційними положеннями математичної науки — алгеброю комплексних чисел. Отже, функції cos та sin є ортогональними одна до одної, тому якщо

$$A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta = F_{m_k} \sin\left(k\theta + \psi_k\right),$$

зі співвідношень

$$\begin{cases} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta = A_k \sin\left(k\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) + B_k \sin k\theta = \operatorname{Im}\left\{\left(A_k\, e^{j\frac{\pi}{2}} + B_k\right)e^{jk\theta}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\left(B_k + jA_k\right)e^{jk\theta}\right\}; \\ F_{m_k} \sin\left(k\theta + \psi_k\right) = \operatorname{Im}\left\{F_{m_k}\, e^{j\psi_k}\, e^{jk\theta}\right\} \end{cases}$$

випливає не тільки рівність наведених в них уявних частин, але, як наслідок, і дійсних, через що

$$B_k + jA_k = F_{m_k}\, e^{j\psi_k}\,,$$

звідки безпосередньо і отримуємо формули (8) та (9).

2. Функція f^* (1) в цьому дослідженні визначає кінцеве положення функціональної точки, яким завершується її рух в локальній області $\mathfrak{R}\left(\left[0, 2\pi\right], \mathrm{R}\right)$ лінійного простору S .

Наявність в функції f^* двох розривів першого роду не порушує умов Діріхле, тому тригонометричний ряд Фур'є цієї функції є збіжним. Коефіцієнти Фур'є знаходимо відповідно до формул

$$A^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\theta)\,d\theta;\quad A^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\theta)\cos n\theta\,d\theta;\quad B^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\theta)\sin n\theta\,d\theta,\quad n = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Сам ряд Фур'є подаємо у вигляді

$$f^*(\theta) = A^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A^n \cos n\theta + B^n \sin n\theta\right) = A^0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_m^n \sin\left(n\theta + \psi^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(\theta). \qquad (11)$$

В спектральних складових співвідношення (11)

$$f^0(\theta) = A^0;\ f^n(\theta) = F_m^n \sin\left(n\theta + \psi^n\right),$$

відповідно амплітуда n-ї гармоніки визначається як

$$F_m^n = \sqrt{\left(A^n\right)^2 + \left(B^n\right)^2}\,, \qquad (12)$$

а її початкова фаза —

$$\psi^n = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{A^n}{B^n},\ B^n \ge 0; \\ \pm\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{A^n}{B^n},\ B^n < 0. \end{cases} \qquad (13)$$

3. Додатково зауважимо, що оскільки система базисних функцій $\{1, \cos k\theta, \sin k\theta;\ k \in \mathrm{N}\}$ тригонометричного ряду Фур'є ортогональна (а не ортонормована), то отримані коефіцієнти Фур'є (6) та (10) не є проекціями функцій f та f^*, але їм пропорційні $\alpha_k = \dfrac{(f, s_k)}{(s_k, s_k)} = \dfrac{(f, \|s_k\| e_k)}{\|s_k\|^2} = \dfrac{(f, e_k)}{\|s_k\|}$.

Також додамо, що коефіцієнти Фур'є як, з одного боку, A_k та B_k неперервної функції f, так і з іншого — A^k та B^k розривної f^* за однакових значень k утворюють впорядковані пари, які позначимо так: $(A_k, B_k) = (A, B)_k$ та $\left(A^k, B^k\right) = (A, B)^k$, відповідно.

4. Розкладемо функцію f^* в *альтернативний спосіб*, скориставшись для цього системою допоміжних функцій $\left\{f_k^*;\ k = 0, 1, ...\right\}$:

$$f_0^*(\theta) = \begin{cases} 0,\ 0 \le \theta < \theta_1; \\ A_0,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2; \\ 0,\ \theta_2 < \theta \le 2\pi, \end{cases} \quad f_k^*(\theta) = \begin{cases} 0,\ 0 \le \theta < \theta_1; \\ f_k(\theta),\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2; \\ 0,\ \theta_2 < \theta \le 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0,\ 0 \le \theta < \theta_1; \\ F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k),\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2; \\ 0,\ \theta_2 < \theta \le 2\pi, \end{cases} \qquad (14)$$

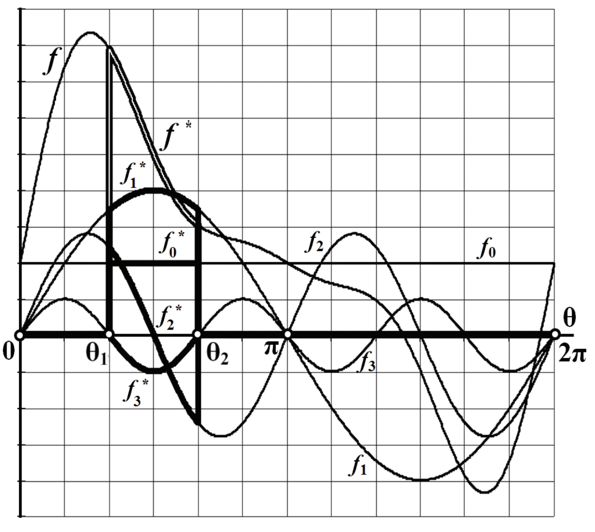

Рис. 3. Альтернативний спосіб розкладання функції f^*

де F_{m_k} та ψ_k — це амплітуди та початкові фази спектральних гармонік функції f, які визначаються за формулами (12) та (13) безпосередньо через коефіцієнти Фур'є.

Графіки системи допоміжних функцій (14) показано на рис. 3.

Як бачимо, функції $\left\{f_k^*;\ k = 0, 1, ...\right\}$ є розривними першого роду. На проміжку $[\theta_1, \theta_2]$ вони тотожні спектральним складовим $f_k(\theta)$ з тригонометричного ряду Фур'є (5), але водночас на періоді поза межами проміжку значення цих функцій дорівнюють нулю.

Можливість вищезазначеного розкладання обумовлена співвідношеннями (1) та (5), у відповідності з якими для функції f^* маємо:

$$f^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(\theta). \tag{15}$$

Додамо, що система допоміжних функцій (14) також утворює *ортогональний базис* функцій.

5. Розриви першого роду в системі функцій $\{f_k^*;\, k = 0, 1, ...\}$ не призводять до порушення умов Діріхле. Тому кожна з цих функцій може бути розкладена в тригонометричний ряд Фур'є

$$f_k^*(\theta) = A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_k^n \cos n\theta + B_k^n \sin n\theta\right) \tag{16}$$

з власними коефіцієнтами Фур'є $\{A_k^0,\, A_k^n,\, B_k^n\}$, де

$$A_k^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k^*(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta)\,d\theta,\ \ k = 0, 1, ...; \tag{17}$$

$$A_k^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k^*(\theta)\cos n\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta)\cos n\theta\,d\theta;\ \ k = 0, 1\, ...;\ \ n = 1, 2, ...; \tag{18}$$

$$B_k^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k^*(\theta)\sin n\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta)\sin n\theta\,d\theta;\ \ k = 0, 1\, ...;\ \ n = 1, 2, ... \tag{19}$$

6. Формули (17)—(19) безпосередньо виявляють і визначають множину законів відображення $M = \{M_k^n;\, k = 0, 1, ...;\, n = 0, 1, ...\}$ відповідних індексу k коефіцієнтів Фур'є $\{A_0,\, A_k,\, B_k;\, k = 1, 2, ...\}$ неперервної функції f в множину коефіцієнтів Фур'є $\{A_k^n,\, B_k^n;\, k = 0, 1, ...;\, n = 0, 1, ...\}$ відповідних цьому індексу k допоміжних функцій $\{f_k^*;\, k = 0, 1, ...\}$.

З урахуванням співвідношень (14) для зазначеного закону відображення *M* маємо

$$M = \left\{M_0^n : A_0 \to \{A_0^n\},\, M_k^n : (A, B)_k \to \left\{(A, B)_k^n\right\};\, k = 1, 2, ...;\, n = 0, 1, ...\right\}. \tag{20}$$

7. Визначимося із законами відображення $M = \{M_k^n;\, k = 0, 1, ...;\, n = 0, 1, ...\}$.

Для цього підставимо в співвідношення (17)—(19) записані для коефіцієнтів Фур'є $\{A_k^0,\, A_k^n,\, B_k^n\}$ допоміжних функцій $\{f_k^*;\, k = 0, 1, ...\}$ спектральні гармоніки (7)—(9) неперервної функції *f*.

Після відповідних математичних перетворень отримуємо такі співвідношення:

1) для закону відображення M_0^0:

$$A_0^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0\,d\theta = \frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)A_0\,; \tag{21}$$

2) для законів відображення M_0^n, де $n = 1, 2, ...$:

$$A_0^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0 \cos n\theta\,d\theta = \frac{-1}{n\pi}(\sin n\theta_1 - \sin n\theta_2)A_0; \tag{22}$$

$$B_0^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0 \sin n\theta\,d\theta = \frac{1}{n\pi}(\cos n\theta_1 - \cos n\theta_2)A_0\,; \tag{23}$$

3) для законів відображення M_k^n, де $k = 1, 2, ...$, а $n = 0, 1, ...$:

а) для випадку, коли $n = 0$:

$$A_k^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k}\sin(k\theta + \psi_k)\,d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi k}\left[\cos(k\theta_1 + \psi_k) - \cos(k\theta_2 + \psi_k)\right]; \tag{24}$$

б) для випадку, коли $k=n$:

$$A_k^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k}\sin\left(k\theta+\psi_k\right)\cos n\theta\, d\theta = \frac{F_{m_k}}{4\pi k}\left[2k\left(\theta_2-\theta_1\right)\sin\psi_k+\cos\left(2k\theta_1+\psi_k\right)-\cos\left(2k\theta_2+\psi_k\right)\right]; \quad (25)$$

$$B_k^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k}\sin\left(k\theta+\psi_k\right)\sin n\theta\, d\theta = \frac{F_{m_k}}{4\pi k}\left[2k\left(\theta_2-\theta_1\right)\cos\psi_k+\sin\left(2k\theta_1+\psi_k\right)-\sin\left(2k\theta_2+\psi_k\right)\right]; \quad (26)$$

в) для випадку, коли $k\neq n$:

$$\begin{aligned} A_k^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k}\sin\left(k\theta+\psi_k\right)\cos n\theta\, d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi\left(k^2-n^2\right)}\Big\{\left(k-n\right)\Big[\cos\left(\left(k+n\right)\theta_1+\psi_k\right)- \\ -\cos\left(\left(k+n\right)\theta_2+\psi_k\right)\Big]+\left(k+n\right)\Big[\cos\left(\left(k-n\right)\theta_1+\psi_k\right)-\cos\left(\left(k-n\right)\theta_2+\psi_k\right)\Big]\Big\}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B_k^n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k}\sin\left(k\theta+\psi_k\right)\sin n\theta\, d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi\left(k^2-n^2\right)}\Big\{\left(k-n\right)\Big[\sin\left(\left(k+n\right)\theta_1+\psi_k\right)- \\ -\sin\left(\left(k+n\right)\theta_2+\psi_k\right)\Big]-\left(k+n\right)\Big[\sin\left(\left(k-n\right)\theta_1+\psi_k\right)-\sin\left(\left(k-n\right)\theta_2+\psi_k\right)\Big]\Big\}, \end{aligned} \quad (28)$$

де в усіх випадках, відповідно до співвідношень (8) та (9),

$$F_{m_k} = \sqrt{\left(A_k\right)^2+\left(B_k\right)^2}\;; \quad \psi_k = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{A_k}{B_k}, & B_k\geq 0; \\ \pm\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{A_k}{B_k}, & B_k<0. \end{cases}$$

8. Множину законів відображення N коефіцієнтів Фур'є $\left\{A_k^n, B_k^n;\, k=0,1,...;\, n=0,1,...\right\}$ допоміжних функцій $\left\{f_k^*;\, k=0,1,...\right\}$ в коефіцієнти Фур'є $\left\{A^0, A^k, B^k;\, k=1,2,...\right\}$ функції f^* знайдемо, скориставшись формулами (15) та (16). В цьому випадку для функції f^* маємо

$$\begin{aligned} f^*\left(\theta\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*\left(\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_k^n\cos n\theta+B_k^n\sin n\theta\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^n\right)\cos n\theta+\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^n\right)\sin n\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

У спосіб співвідношення тригонометричного ряду Фур'є (18) функції f^* з формулою (29)

$$A^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A^n\cos n\theta+B^n\sin n\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^n\right)\cos n\theta+\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^n\right)\sin n\theta$$

отримуємо шукану множину законів для другого перетворення:

$$N = \left\{N^0:\left\{A_k^0\right\}\to A^0,\, N^n:\left\{\left(A,B\right)_k^n\right\}\to\left(A,B\right)^n;\, k=0,1,...;\, n=0,1,...\right\}, \quad (30)$$

а саме

$$A^0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0;\quad A^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^n;\quad B^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^n\;. \quad (31)$$

9. Отже, закон відображення L коефіцієнтів Фур'є, що спостерігається внаслідок руху функціональної точки в гільбертовому просторі від неперервної функції f до розривної першого роду f^*

$$L:\left\{A_0,\left(A,\,B\right)_k\right\}\to\left\{A^0,\left(A,\,B\right)^k\right\},\; k=1,2,...,$$

є *композицією* (!) двох законів відображення

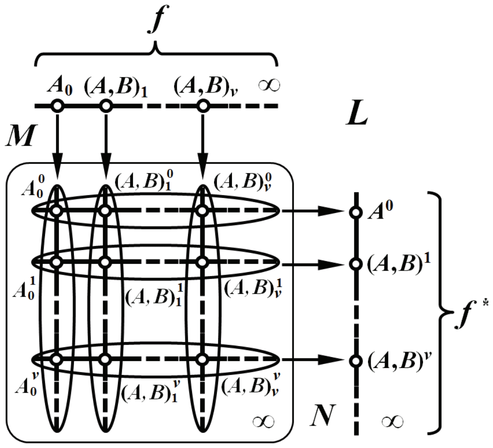

Рис. 4. Композиція закону відображення $L = N \circ M$ коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є

$$L = N \circ M\,. \tag{32}$$

Рис. 4 розкриває суть, характерні та істотні ознаки цієї композиції в графічній формі.

Перший із зазначених законів

$$M : \left\{A_0, \left(A,\, B\right)_k\right\} \to \left\{\left\{A_0^n\right\}, \left\{\left(A, B\right)_k^n\right\}\right\},$$

де $k = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots$, відповідно до (20), визначено як множинний закон, який утворює множину відображень, узагальнено і повно розкритих в аналітичній формі в формулах (21)—(28), а також в (8) та (9).

Другий закон композиції (32)

$$N : \left\{\left\{A_k^0\right\}, \left\{\left(A, B\right)_k^n\right\}\right\} \to \left\{A^0, \left(A, B\right)^n\right\},$$

де $k = 0, 1, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots$, є множинним законом множини відображень (30), аналітична сутність кожного з елементів якого розкрита формулами (31).

10. Додатково зазначимо, що клас 2π-періодичних функцій f^{**}, які на періоді мають кінцеву кількість p пар розривів першого роду (див. рис. 2), відповідно до формули (2) є послідовністю p композицій відображення (32), внаслідок чого закон відображення їх коефіцієнтів Фур'є визначатиметься за формулою (3).

Висновки

Виявлено і описано окремі властивості нескінченновимірного лінійного гільбертового простору 2π-періодичних функцій, побудованого над множиною дійсних чисел, із заданим в ньому скалярним добутком, зокрема визначено закон перетворення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є при трансформації неперервної на періоді функції в розривну першого роду. Зазначена математична задача постає і є актуальною під час проведення спектрального аналізу періодичного руху континуальних фізичних і технічних динамічних систем у разі дискретизації їхнього руху в просторі та часі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] В. І. Сенько, М. В. Панасенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, та В. В. Ясінський, *Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка*, том 4, книга 1. Київ: Каравела, 2013, 640 с.

[2] Г. А. Месяц, *Импульсная энергетика и электроника*. Москва: Наука, 2004, 704 с.

[3] Andrea Goldsmith, *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005, 674 p.

[4] А. А. Харкевич, *Спектры и анализ*. Москва: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 240 с.

[5] Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, та С. Ш. Кацив, *Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола*. Херсон, Україна: ОЛДІ-ПЛЮС, 2013, 456 с.

[6] Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, *Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2015, 196 с.

[7] Ю. Г. Ведміцький, «Біноміальні перетворення в формуванні узагальненої задачі Коші,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 3(120), с. 91-95, 2015.

[8] Ю. Г. Ведміцький, «Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії,» *Вісник Інженерної академії України*, вип. 4, с. 207-213, 2016.

[9] J. Awrejcewicz, D. Lewandowski, and P. Olejnik, *Dynamics of Mechatronics Systems: Modeling, Simulation, Control, Optimization and Experimental Investigations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2017, 351 p.

Рекомендована кафедрою теоретичної електротехніки та електричних вимірювань ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 25.04.2018

Ведміцький Юрій Григорович — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, e-mail: wjg@ukr.net.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Yu. G. Vedmitskyi[1]

The Law of Transforming the Coefficients of a Trigonometric Fourier Series under the Mapping of a Continuous Function into a Discontinuous Function of the First Kind

[1]Vinnytsia National Technical University

In this paper, we describe some properties of an infinite-dimensional linear Hilbert space of 2π-periodic functions with a scalar product defined in it. This space is constructed over a set of real numbers. In particular, the law of transformation of the coefficients of the trigonometric Fourier series is defined in the case of transformation of a continuous function on the period into a discontinuous function of the first kind. In this regard, strictly justified and obtained expressions that in analytical form disclose the said mathematical law. A successful solution of the problem became possible as a result of the author introducing an auxiliary system basis of orthogonal functions. This made it possible to obtain an intermediate expansion of each of the original Fourier coefficients of a continuous periodic function, and with the subsequent rearrangement of the terms it was possible to form the decomposition of a discontinuous periodic function and determine the Fourier coefficients of such decomposition. This approach has revealed the compositional nature of the required mathematical law of transformation. This mathematical problem appears and becomes relevant during the spectral analysis of continual physical and technical dynamic systems in the case of discretization of their motion in space and time. As an example of such systems, electrical or radio engineering systems can be called. The solution of the problem makes it possible to supplement the spectral (frequency) method of analyzing electrical circuits at the present time with missing mathematical models that are able to directly and without resorting to the integration operation to identify and evaluate the distribution of the spectral components of the trigonometric Fourier series in the case of discretization of the continuous motion of dynamical systems. The above, for example, can be attributed to devices and systems power semiconductor electronics in which the generation, transportation and conversion of electrical (electromagnetic) energy is carried out by the method of discretizing the energy processes that are continuous in their physical nature. Today, this approach has become a paradigm in the development of modern power electronics.

Keywords: spectral analysis, Hilbert space, orthogonal basis, Fourier series, Fourier coefficients, continuous and discontinuous function, trigonometric series, electrical engineering theory.

Vedmitskyi Yurii G. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of the Chair of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, e-mail: wjg@ukr.net

Ю. Г. Ведмицкий[1]

Закон преобразования коэффициентов ряда Фурье при отображении непрерывной функции в разрывную первого рода

[1]Винницкий национальный технический университет

Исследованы отдельные свойства бесконечномерного линейного гильбертова пространства 2π-периодических функций, построенного над множеством действительных чисел, с заданным в нём скалярным произведением двух функций. В связи с этим, получен закон преобразования коэффициентов тригонометрического ряда Фурье при трансформации непрерывной на периоде функции в разрывную первого рода. Для решения задачи использованы отдельные классические приложения математического и функционального анализа. В процессе решения задачи доказано, что указанный математический закон имеет сложную структуру и представляет собой композицию двух множественных законов отображения. Для раскрытия первого закона произведено альтернативное разложение разрывной функции в тригонометрический ряд Фурье с использованием базиса, где в качестве ортов использованы разрывные тригонометрические функции из ортогонального базиса исходной непрерывной функции. Биективное сопоставление сформированных особым образом подмножеств из множества полученных указанным способом коэффициентов Фурье с коэффициентами Фурье, полученными для той же разрывной функции, но при традиционном подходе, позволил аналитически раскрыть и содержание второго из законов отображения. Для удобства восприятия интерпретацию каждого из математических законов отображения и их композицию приведено не только в аналитической, но и графической формах представления. Указанная математическая задача возникает и требует своего решения, прежде всего во время проведения спектрального анализа периодического движения континуальных физических и технических динамических систем при прерывании и дискретизации их движения в пространстве и времени. Полученные решения обнаруживают себя как математические модели, способные преобразовывать параметры непрерывного движения в прерывное без выполнения операции интегрирования, т. е. непосредственно (прямо), что создаёт преимущество предложенного подхода в сравнении с уже известными. Сами же математические модели на сегодняшний день затребованы многочисленными приложениями и инновациями не только в информационных, но и, главным образом, в силовых технических системах произвольной физической природы, что неопровержимо свидетельствует об актуальности решаемой задачи и её практической целесообразности.

Ключевые слова: спектральный анализ, гильбертово пространство, ортогональный базис функции, тригонометрический ряд Фурье, коэффициенты Фурье, непрерывная и разрывная функции, теоретическая электротехника.

Ведмицкий Юрий Григорьевич — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры теоретической электротехники и электрических измерений, e-mail: wjg@ukr.net