https://doi.org/10.31649/1997-9266-2020-150-3-73-80

УДК 539.3

В. В. Чигиринський[1]
О. Г. Науменко[2]
О. В. Овчинников[3]

ПЛОСКА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ З ВИКОРИСТАННЯМ АРГУМЕНТ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

[1]Рудненський індустріальний інститут, Рудний;
[2]Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»;
[3]Національний університет «Запорізька політехніка»

Розглянуті загальні підходи до рішення плоскої задачі механіки суцільного середовища, які пройшли успішну апробацію в теорії пластичності, пружності, динамічних задачах теорії пружності. На основі методів аргумент функцій та комплексного змінного розроблені нові підходи до визначення компонентів тензору напружень в полярних координатах. Для розв'язання плоскої задачі використано системи рівнянь рівноваги. Запропоновано фундаментальне підставлення. Показано використання тригонометричного підставлення, яке пов'язує інтегральні характеристики напруженого стану з компонентами тензору напружень. Введено до розгляду аргумент функції базових змінних. При підставленні до диференційних рівнянь сформовано оператори, які характеризуються цими аргумент функціями, виконуючі роль своєрідного регулятора пошуку. В результаті цього, визначені закономірності існування розв'язків у вигляді інваріантних співвідношень Коші–Рімана та рівнянь Лапласа. Отриманий результат зручно застосовувати для спрощення, що дозволяє лінеарізувати граничні умови. В розв'язаннях використовують узагальнюючі співвідношення в диференційній формі для конкретних функцій — функцій гармонічного типу. Тригонометрична форма епюри дотичних напружень фактично підтверджена теоретичними та експериментальними даними. Отримані розв'язки, які визначають не самі функції, а умови їх існування з використанням диференційних співвідношень Коші–Рімана. Розв'язки є загальнішим випадком з тією особливістю, що представлено не у вигляді добутку функцій, кожна з яких визначається однією координатою, а добутком різних функцій, одночасно залежних від двох координат. Зіставлення отриманих результатів з розв'язками інших авторів показує, що представлене розв'язання після нескладних перетворень можливо спростити та розглядати отриманий розв'язок як більш узагальнений.

Ключові слова: метод аргумент функцій, співвідношення Коші–Рімана, інтенсивність дотичних напружень, полярні координати.

Вступ

Використання різних підходів розв'язання задач механіки суцільного середовища дозволяє розширити коло розв'язуваних прикладних проблем у машинобудуванні. Одним з таких нових напрямів є випробування в теорії і практиці методу аргумент функцій [1]—[5]. Він знаходить своє застосування в теорії пластичності, пружності, розв'язанні динамічних прикладних задач геомеханіки. В роботах [5], [6] отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності з використанням аргумент функції комплексного змінного. В роботі [6] підкреслено той факт, що в процесах обробки металів тиском присутні як зони пластичної течії, так і зони пружної деформації. В роботі [7] розглянута прикладна задача, пов'язана з простим процесом вальцювання, яка розв'язана в полярних координатах. Відомо, що різні координати дозволяють спростити розв'язання диференціальних рівнянь, але необхідно сформулювати підходи їх використання.

Метою роботи є спрощення знаходження розв'язків диференціальних рівнянь в рамках методу аргумент функцій комплексного змінного.

Результати дослідження

Розв’язуючи плоску задачу теорії пружності, використано систему рівнянь рівноваги та задоволення нормальних напружень рівнянню Лапласа в полярних координатах

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\phi}{\rho} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\phi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + 2\frac{\tau_{\phi\rho}}{\rho} = 0; \\ &\nabla^2\left(\sigma_\rho + \sigma_\phi\right) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

граничні умови

$$\tau_n = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\phi}{2}\sin 2\phi - \tau_{\rho\phi}\cos 2\phi. \tag{2}$$

Вираз (2) зручно застосовувати для спрощень, що дозволяє лінеарізувати граничні умови [8]. Інтенсивність дотичних напружень для плоскої задачі

$$T_i = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_\rho - \sigma_\phi\right)^2 + 4\tau_{\rho\phi}^2},$$

звідки

$$\sigma_\rho - \sigma_\phi = 2\sqrt{T_i^2 - \tau_{\rho\phi}^2}. \tag{3}$$

Якщо різницю (3) підставити в (2), отримаємо:

$$T_n = -\frac{2T_i^2\sqrt{1-\left(\frac{\tau_{\rho\phi}}{T_i}\right)^2}}{2}\sin 2\phi - \tau_{\rho\phi}\cos 2\phi, \tag{4}$$

де T_n — дотичне напруження на контакті; σ_ρ, σ_φ — нормальні напруження в полярних координатах; $\tau_{\rho\varphi}$ — дотичне напруження; φ — кут нахилу граничної площини.

Після перетворень у виразі (4) з’являється нелінійність, що ускладнює розв’язання задачі. Скористаємося підходами [8], тобто маємо

$$\tau_{\rho\phi} = T_i \sin \mathrm{A\Phi}, \tag{5}$$

тоді

$$\tau_n = -T_i \sin\left(\mathrm{A\Phi} - 2\phi\right), \tag{6}$$

де АФ — визначальна функція координат ρ і φ, або перша аргумент функція.

Тригонометрична форма епюри дотичних напружень фактично підтверджена теоретичними [9] та експериментальними [10] даними. Інтенсивність дотичних напружень T_i може бути представлена фундаментальною підстановкою у вигляді

$$T_i = C_\sigma \exp Q, \tag{7}$$

де Q — визначальна функція координат ρ и φ, або друга аргумент функція. Тоді, з урахуванням (7)

$$\begin{aligned} &\tau_{\rho\phi} = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A\Phi}; \\ &\tau_n = C_\sigma \exp Q \sin\left(\mathrm{A\Phi} - 2\phi\right). \end{aligned} \tag{8}$$

У виразах (8) представлені дві аргумент функції АФ і Q. Як показав подальший аналіз, вони здатні замкнути розв’язання поставленої задачі.

Відповідно до функції комплексного змінного [11], маємо

$$\tau_{\rho\phi} = C_\sigma \frac{\exp\left(Q + i\mathrm{A\Phi}\right) - \exp\left(Q - i\mathrm{A\Phi}\right)}{2i}. \tag{9}$$

Похідні рівнянь (1)

$$\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} = \frac{C_\sigma}{2i}\Big[\big(Q_\phi + iA\Phi_\phi\big)\exp\big(Q + iA\Phi\big) - \big(Q_\phi - iA\Phi_\phi\big)\exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big];$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} = \frac{C_\sigma}{2i}\Big[\big(Q_\rho + iA\Phi_\rho\big)\exp\big(Q + iA\Phi\big) - \big(Q_\rho - iA\Phi_\rho\big)\exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big],$$

де Q_φ, $A\Phi_\rho$ і т. д. — частинні похідні від аргумент функцій по куту φ та ρ.

З урахуванням (3), (5), (7), отримаємо

$$\sigma_\rho - \sigma_\phi = 2C_\sigma \exp Q \cos A\Phi = 2\frac{C_\sigma}{2}\Big[\exp\big(Q + iA\Phi\big) + \exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big]. \qquad (10)$$

Підставивши (10) та похідні у рівняння рівноваги (1), проінтегрувавши з урахуванням девіаторної складової для нормальних напружень, отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho = -\Big\{&\int \frac{C_\sigma}{2i}\frac{1}{\rho}\Big[\big(Q_\phi + iA\Phi_\phi\big)\exp\big(Q + iA\Phi\big) - \big(Q_\phi - iA\Phi_\phi\big)\exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big]d\rho + \\ &+ 2\int \frac{C_\sigma}{2}\frac{1}{\rho}\Big[\exp\big(Q + iA\Phi\big) + \exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big]d\rho\Big\} + \sigma_0;\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\phi = -\Big\{&\int \frac{C_\sigma}{2i}\rho\Big[\big(Q_\rho + iA\Phi_\rho\big)\exp\big(Q + iA\Phi\big) - \big(Q_\rho - iA\Phi_\rho\big)\exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big]d\phi + \\ &+ 2\int \frac{C_\sigma}{2i}\Big[\exp\big(Q + iA\Phi\big) - \exp\big(Q - iA\Phi\big)\Big]d\phi\Big\} + \sigma_0.\end{aligned} \qquad (12)$$

З виразів (11), (12) видно, що інтегрування в загальному вигляді неможливо, тому що під інтегралами фігурують декілька змінних. Скористаємося співвідношеннями Коші–Рімана у вигляді, що подає математичний зв’язок поміж змінними таким чином:

$$\rho Q_\rho = -A\Phi_\phi; \;\; \rho A\Phi_\rho = Q_\phi. \qquad (13)$$

Після підстановки (13) в (11) і (12) та інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= C_\sigma \frac{\exp\big(Q + iA\Phi\big) + \exp\big(Q - iA\Phi\big)}{2} - I_1 + \sigma_0; \\ \sigma_\phi &= -C_\sigma \frac{\exp\big(Q + iA\Phi\big) + \exp\big(Q - iA\Phi\big)}{2} - I_2 + \sigma_0,\end{aligned} \qquad (14)$$

де

$$\begin{aligned}I_1 &= 2C_\sigma \int \frac{\exp\big(Q + iA\Phi\big) + \exp\big(Q - iA\Phi\big)}{2\rho}d\rho; \\ I_2 &= 2C_\sigma \int \frac{\exp\big(Q - iA\Phi\big) - \exp\big(Q - iA\Phi\big)}{2i}d\phi.\end{aligned} \qquad (15)$$

Можна показати, що $I_1 = I_2 = I$. Для цього необхідно взяти похідні за різними аргументами і провести інтегрування виразів. Маємо рівності з точністю до постійної інтегрування. З отриманих виразів (14) випливає, що для розв’язання задачі необхідно знати середнє нормальне напруження σ_0. Для цього скористаємося умовою нерозривності деформацій

$$\nabla^2\big(\sigma_\rho + \sigma_\phi\big) = 0;$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\phi}{2}; \;\; \sigma_\rho + \sigma_\phi = 2\sigma_0 ... n\sigma_0.$$

Підставимо σ_0 в рівняння Лапласа

$$\nabla^2\big(n\sigma_0\big) = \frac{\partial^2\big(n\sigma_0\big)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\big(n\sigma_0\big)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\big(n\sigma_0\big)}{\partial\phi^2} = 0.$$

Аналіз виразів (14), (15) показує, що ядром розв’язання є вираз

$$C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi = C_\sigma \frac{\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \exp(Q - i\mathrm{A}\Phi)}{2}. \tag{16}$$

Підставимо (16) в рівняння нерозривності деформацій. Після скорочення та перегрупування отримаємо рівняння нерозривності деформацій в такому вигляді:

$$\begin{gathered}
\left[\begin{aligned}&\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi}\right) + i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi}\right) + \left(\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\phi\right)\left(\rho Q_\rho - \mathrm{A}\Phi_\phi\right) + \\ &+\left(Q_\phi + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho\right)\left(Q_\phi - \rho\mathrm{A}\Phi_\rho\right) + 2i\left(\rho^2 Q_\rho \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\phi \mathrm{A}\Phi_\phi\right)\end{aligned}\right]\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \\
+\left[\begin{aligned}&\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi}\right) - i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi}\right) + \left(\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\phi\right)\left(\rho Q_\rho - \mathrm{A}\Phi_\phi\right) + \\ &+\left(Q_\phi + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho\right)\left(Q_\phi - \rho\mathrm{A}\Phi_\rho\right) - 2i\left(\rho^2 Q_\rho \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\phi \mathrm{A}\Phi_\phi\right)\end{aligned}\right]\exp(Q - i\mathrm{A}\Phi) = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Після усунення нелінійності, прирівнюємо вирази в дужках (17) до нуля, тобто

$$\rho Q_\rho + \mathrm{A}\Phi_\phi = 0;\ Q_\phi - \rho\mathrm{A}\Phi_\rho = 0$$

або

$$\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\phi;\ Q_\phi = \rho\mathrm{A}\Phi_\rho. \tag{18}$$

Отримали співвідношення Коші–Рімана (13), яке використовували в рівняннях рівноваги при переході від одного змінного до іншого. З урахуванням (18) отримаємо

$$\rho Q_\rho \cdot \mathrm{A}\Phi_\rho + Q_\phi \cdot \mathrm{A}\Phi_\phi = -\rho\mathrm{A}\Phi_\phi \cdot \mathrm{A}\Phi_\rho + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho \cdot \mathrm{A}\Phi_\phi = 0.$$

Останнє перетворення дозволяє представити рівняння нерозривності деформацій у вигляді

$$\begin{gathered}
\left[\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi}\right) + i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi}\right)\right]\exp(Q + i\mathrm{A}\Phi) + \\
+\left[\left(\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi}\right) - i\left(\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi}\right)\right]\exp(Q - i\mathrm{A}\Phi) = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

З урахуванням (18), другі похідні представлені так:

$$\left(\rho Q_\phi + \mathrm{A}\Phi_\phi\right)_\rho = 0;\ \left(Q_\phi - \rho\mathrm{A}\Phi_\rho\right)_\phi = 0;$$

$$Q_\rho + \rho Q_{\rho\rho} + \mathrm{A}\Phi_{\phi\rho} = 0;\ Q_{\phi\phi} - \rho\mathrm{A}\Phi_{\rho\phi} = 0$$

або

$$\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi} = 0.$$

Провівши аналогічні перетворення, отримаємо:

$$\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi} = 0.$$

Підставляючи останні оператори в останнє рівняння (1), маємо тотожність. Таким чином, вираз

$$\sigma_0 = nC_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi \tag{20}$$

і є розв'язком рівняння (1) за умови

$$\begin{gathered}
\rho Q_\rho = -\mathrm{A}\Phi_\phi, Q_\phi = \rho\mathrm{A}\Phi_\rho; \\
\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\phi\phi} = 0; \\
\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho\mathrm{A}\Phi_\rho + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi} = 0.
\end{gathered} \tag{21}$$

Розв'язання плоскої задачі теорії пружності (1) в аналітичному вигляді тоді запишеться так:

$$\sigma_\rho = C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi + \sigma_0 - I;$$

$$\sigma_\phi = -C_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi + \sigma_0 - I;$$

$$\begin{gathered}
\tau_{\rho\phi} = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A}\Phi; \\
\sigma_0 = nC_\sigma \exp Q \cos \mathrm{A}\Phi,
\end{gathered} \tag{22}$$

якщо

$$\rho Q_{\rho} = -\mathrm{A}\Phi_{\phi}, Q_{\phi} = \rho \mathrm{A}\Phi_{\rho};$$

$$\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_{\rho} + Q_{\phi\phi} = 0;$$

$$\rho^2 \mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \rho \mathrm{A}\Phi_{\rho} + \mathrm{A}\Phi_{\phi\phi} = 0.$$

Аналізуючи (22), видно, що основу розв'язку складають базові функції — фундаментальна, тобто експонента, і тригонометрична; невідомі аргумент функції АФ і Q визначаються рівняннями Лапласа в полярних координатах, що вважаються як знайдені.

Цікаво порівняти розв'язок (22) з відомими розв'язками авторів [12]. Показано, що розв'язком плоскої задачі теорії пружності є функція напружень λ, яка задовольняє бігармонічне рівняння

$$\nabla^4 \lambda = 0,$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \phi^2}\right) = 0. \tag{23}$$

Покажемо, що розв'язок (22) задовольняє бігармонічному рівнянню (23). Припустимо, що

$$\lambda = C_{\sigma} \exp Q \sin \mathrm{A}\Phi = C_{\sigma} \frac{\exp\left(Q + i\mathrm{A}\Phi\right) - \exp\left(Q - i\mathrm{A}\Phi\right)}{2i}. \tag{24}$$

Визначаючи похідні від λ (24) по радіусу ρ і куту φ, за аналогією з (23), підставляючи їх в рівняння Лапласа, після перетворення і перегрупування отримаємо:

$$\frac{C_{\sigma}}{2i}\left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned}&\left(Q_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}Q_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}Q_{\phi\phi}\right) + i\left(\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{A}\Phi_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho}\right) + \\ &+\left(Q_{\rho} + i\mathrm{A}\Phi_{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(Q_{\phi} + i\mathrm{A}\Phi_{\phi}\right)^2\end{aligned}\right]\exp\left(Q + i\mathrm{A}\Phi\right) - \\ &-\left[\begin{aligned}&\left(Q_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}Q_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}Q_{\phi\phi}\right) - i\left(\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{A}\Phi_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\mathrm{A}\Phi_{\rho\rho}\right) + \\ &+\left(Q_{\rho} - i\mathrm{A}\Phi_{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(Q_{\phi} - i\mathrm{A}\Phi_{\phi}\right)^2\end{aligned}\right]\exp\left(Q - i\mathrm{A}\Phi\right)\end{aligned}\right\} = 0. \tag{25}$$

Розписуючи суми квадратів, здійснивши чергове перегрупування, отримаємо різниці квадратів, які зручно трансформуються у розв'язання за умови:

$$\left.\begin{aligned}\rho Q_{\rho} + \mathrm{A}\Phi_{\phi} = 0,\\ \rho \mathrm{A}\Phi_{\rho} - Q_{\phi} = 0\end{aligned}\right\} \text{— } \textit{варіант}\ \mathrm{I}$$

і (26)

$$\left.\begin{aligned}\rho Q_{\rho} - \mathrm{A}\Phi_{\phi} = 0,\\ \rho \mathrm{A}\Phi_{\rho} + Q_{\phi} = 0\end{aligned}\right\} \text{— } \textit{варіант}\ \mathrm{II}.$$

Приймаючи перший варіант (26) і підставляючи його в (25), отримаємо тотожність. Це було потрібно показати. Підставляючи нульовий варіант розв'язання рівняння Лапласа (23) до другої похідної за координатами, тобто

$$\left(\frac{\partial^2 (0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial (0)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 (0)}{\partial \phi^2}\right) = 0,$$

маємо тотожність для бігармонічного рівняння.

Отже, запропоноване рішення (24) тотожно задовольняє не тільки рівняння Лапласа, але й бігармонічне рівняння. Це дозволяє стверджувати, що пропонується новий метод розв'язання плоских задач теорії пружності.

Розв'язок (24) можна посилити та записати у вигляді

$$\lambda = C_\sigma \exp Q\left(C_1 \sin \mathrm{A\Phi} + C_2 \cos \mathrm{A\Phi}\right); \tag{27}$$

$$\lambda = C_\sigma \left(\sinh Q + \cosh Q\right)\left(C_1 \sin \mathrm{A\Phi} + C_2 \cos \mathrm{A\Phi}\right), \tag{28}$$

де $\sinh Q$, $\cosh Q$ — гіперболічні синус та косинус.

Отриманий результат (27), (28) можливо зіставити з розв'язанням, наведеним в роботі [12], де фігурують експоненціальні та тригонометричні функції.

Розв'язок Жемочкіна має вигляд

$$\lambda = f\left(\rho\right)\sin\phi,$$

де $f(\rho)$ — функція однієї змінної ρ, φ — кут, що визначає іншу змінну.

В кінцевому вигляді, згідно з [12], функція трансформується у вираз

$$\lambda = \frac{D}{\rho}\sin\phi. \tag{29}$$

Загальне розв'язання (27), (28) з використанням співвідношень Коші–Рімана можливо адаптувати до виразу (29), як до часткового розв'язку запропонованих залежностей. Дійсно, вважаючи $C_2 = 0$, $\mathrm{A\Phi} = \varphi$, перетворимо вираз (27) до іншого вигляду:

$$\lambda = C_\sigma \exp Q \sin \mathrm{A\Phi}, \tag{30}$$

коли $$\rho Q_\rho = -\mathrm{A\Phi}_\phi;\ \rho \mathrm{A\Phi}_\rho = Q_\phi.$$

З аналізу видно, що $\mathrm{A\Phi}_\varphi = 1$, $\mathrm{A\Phi}_\rho = 0$, $Q_\varphi = 0$, $Q_\rho = f(\rho)$. Тоді співвідношення Коші–Рімана набувають вигляду

$$\rho Q_\rho = -1;$$

$$Q_\rho = -\frac{1}{\rho};$$

$$Q = -\ln\rho + C_1.$$

Визначаючи C_1, запишемо $$Q = \ln\frac{D}{\rho}.$$

Підставимо в (30), маємо

$$\lambda = \exp\left(\ln\frac{D}{\rho}\right)\sin\phi = \frac{D}{\rho}\sin\phi,\ \text{якщо}\ \ C_\sigma = 1. \tag{31}$$

Після перетворення (30) в (31) отримаємо результат (29). З цього випливає, що (27), (28) є загальнішим випадком з тією особливістю, що розв'язок представлено не у вигляді добутку функцій, кожна з яких визначається однією координатою, а добутком різних функцій, одночасно залежних від двох координат. При цьому останні сполучаються співвідношенням Коші–Рімана.

Висновки

1. Розв'язана задача теорії пружності в полярних координатах з використанням методу аргумент функцій.
2. Особливістю отриманого результату є замикальні співвідношення Коші–Рімана, які визначають умови існування цього результату.
3. Зіставлення з результатами досліджень інших авторів дозволяє розглядати отриманий розв'язок як більш узагальнений.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] V. Chigurinski, "The study of stressed and deformed metal state under condition of no uniform plastic medium flow," *Metalurgija*, Zagreb, vol. 38, br. 1, pp. 31-37, 1999.

[2] V. Chygyryns'kyy, "Analysis of the state of stress of a medium under conditions of inhomogeneous plastic flow," *Metalurgija*, Zagreb. vol. 43, br. 2, pp. 87-93, 2004.

[3] В. В. Чигиринский, «Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций,» *Известия вузов. Черная металлургия*, № 5, с. 11-16, 2009.

[4] V. Chigirinsky, and A. Putnoki, "Development of dynamic model of transients in mechanical systems using argument-functions," *Easten-European Journal of Technologies. Applied mechanics*, (87), pp. 11-21, 2017. doi: 10.15587/1729-4061.2017.101282.

[5] V. Chigirinsky, and O. Naumenko, "Studying the stressed state of elastic medium using the argument function of a complex variable," *Easten-European Journal of Technologies. Applied mechanics*, 5/7 (101), pp. 27-35, 2019. doi: 10.15587/1729-4061.2019.177514.

[6] В. В. Чигиринский, и Е. Г. Науменко, «Некоторые особенности решения плоской задачи механики сплошной среды,» *Обработка материалов давлением: Сборник научных трудов*, № 1(48), с. 3-11, 2019.

[7] В. С. Смирнов, *Теория прокатки*. Москва: Металлургия, 1967.

[8] В. В. Чигиринский, В. А. Бренер, и Е. Г. Науменко, «Анализ граничных условий пространственной задачи механики сплошной среды,» *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*, № 11 (1336), с. 87-93, 2019.

[9] Н. И. Безухов, *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*, 2-е изд., испр. и доп. Москва: Высш. шк., 1968.

[10] П. Л. Клименко, *Контактные напряжения при прокатке*. Днепропетровск, Украина: Пороги, 2007.

[11] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва: Наука, 1966.

[12] Б. Н. Жемочкин, *Теория упругости*. Москва: Гостройиздат, 1957.

Рекомендована кафедрою опору матеріалів і прикладної механіки ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 26.03.2020

Чигиринський Валерій Вікторович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри металургії та гірничого діла, e-mail: chigirinvv18@gmail.com .

Рудненський індустріальний інститут, Рудний;

Науменко Олена Геннадіївна — старший викладач кафедри будівельної, теоретичної та прикладної механіки.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро;

Овчинников Олександр Володимирович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедрою обладнання та технології зварювального виробництва.

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя

V. V. Chygyrynskyi[1]
O. G. Naumenko[2]
O. V. Ovchynnykov[3]

The Solution of Continuum Mechanics Plane Problem in the Polar Coordinates Using the Argument Functions of Complex Variable

[1]Rudny Industrial Institute;
[2]Dnipro University of Technology;
[3]Zaporizhzhia Polytechnic National University

The general approaches to the solution of the plane problem of continuum mechanics, which have been successfully tested in the theory of plasticity, elasticity, dynamic problems of the theory of elasticity, are considered. Based on the argument function method and the method of a complex variable, new approaches to the determination of components of the stress tensor in polar coordinates have been developed. The equilibrium equation systems were used to solve the flat problem. A fundamental substitution is suggested. Use of a trigonometric substitution that connects integral characteristics of a stressed state with components of a stress tensor is demonstrated. Argument functions of basic variables are introduced. When substituting into differential equations, operators are formed, which are characterized by these argument functions and that perform a role of special search regulators. As a result of this, dependencies of existence of solutions in a form of the invariant Cauchy–Riemann conditions and Laplace's equations are determined. The result obtained is conveniently applied for simplification, allowing linearization of boundary conditions. The solution uses generalized relations in the differential form for specific functions - functions of harmonic type. The trigonometric shape of the shearing stress distribution diagram is actually confirmed by theoretical and experimental data. The solutions that determine not the functions themselves, but the conditions of their existence using Cauchy–Riemann differential conditions are obtained. The solution is a more general case with the feature that is represented not by the product of functions, each of which is determined by one coordinate, but by the product of different functions simultaneously dependent on two coordinates. Comparison of the obtained results with the solutions of other authors shows that the presented solution after simple transformations can be simplified and consider the obtained solution as more generalized.

Keywords: argument functions method, Cauchy–Riemann conditions, shearing stress intensity, polar coordinates.

Chygyrynskyi Valerii V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Metallurgy and Mining, e-mail: chigirinvv18@gmail.com ;

Naumenko Olena G. — Senior Lecturer of the Chair of Structural, Theoretical and Applied Mechanics;

Ovchynnykov Oleksandr V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Welding Technology and Equipment

В. В. Чигиринский[1]
Е. Г. Науменко[2]
А. В. Овчинников[3]

Плоская задача механики сплошной среды в полярных координатах с использованием аргумент функций комплексной переменной

[1]Рудненский индустриальный институт, Рудный;
[2]Национальний технический университет «Днепровская политехника»;
[3]Национальний университет «Запорожская политехника»

Рассмотрены общие подходы решения плоской задачи механики сплошной среды, которые прошли успешную апробацию в теории пластичности, упругости, динамических задачах теории упругости. На основе методов аргумент функций и комплексного переменного разработаны новые подходы определения компонентов тензора напряжений в полярных координатах. Для решения плоской задачи использованы системы уравнений равновесия. Предложена фундаментальная подстановка. Показано использование тригонометрической подстановки, связывающей интегральные характеристики напряженного состояния с компонентами тензора напряжений. Введены в рассмотрение аргумент функции базовых переменных. При подстановке в дифференциальные уравнения сформированы операторы, характеризуемые этими аргумент функциями, выполняющие роль своеобразных регуляторов поиска. В результате этого, определены закономерности существования решений в виде инвариантных соотношений Коши–Римана и уравнений Лапласа. Получение нового результата связано с упрощением задачи, что позволяет линеаризовать граничные условия. В решении используются обобщающие соотношения в дифференциальной форме для конкретных функций — функций гармонического типа. Тригонометрическая форма эпюры касательных напряжений фактически подтверждена теоретическими и экспериментальными данными. Получены решения, которые определяют не сами функции, а условия их существования с использованием дифференциальных соотношений Коши–Римана. Решение является более общим случаем с той особенностью, что представлено не в виде произведения функций, каждая из которых определяется одной координатой, а произведением разных функций, одновременно зависящих от двух координат. Сопоставление полученных результатов с решениями других авторов показывает, что представленное решение после несложных преобразований можно упростить и рассматривать полученное решение как более обобщенное.

Ключевые слова: метод аргумент функций, соотношения Коши–Римана, интенсивность касательных напряжений, полярные координаты.

Чигиринский Валерий Викторович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры металлургии и горного дела, e-mail: chigirinvv18@gmail.com ;

Науменко Елена Геннадиевна — старший преподаватель кафедры строительной, теоретической и прикладной механики;

Овчинников Александр Владимирович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой оборудования и технологии сварочного производства