

Я. В. Іванчук¹
Р. Д. Іскович-Лотоцький¹
К. В. Добровольська²
О. Д. Замковий¹
Р. І. Павлович¹

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО СЕРЕДОВИЩА

¹Вінницький національний технічний університет;

²Вінницький національний медичний університет ім. М. І. Пирогова

Розроблена математична модель, яка описує напружений стан ґрунтового середовища. Базова розрахункова модель ґрунтового масиву представлена у вигляді дисперсного середовища, напружений стан якого описується дискретно-континуальною моделлю під дією усіх складових напружень. Такий підхід дозволив використати основні положення теорії пружності для побудови системи диференціальних рівнянь рівноваги дисперсного середовища для плоскої постановки задачі, а також використати ймовірнісні властивості дисперсних середовищ для розв'язку систем диференціальних рівнянь, які описують розподіл напружень в розпірному дисперсному середовищі із розподільною властивістю. Під дією на ґрунтовий масив зовнішнього навантаження у вигляді зосередженої сили отримано диференціальне рівняння розподілу вертикального нормального напруження параболічного типу, як один з різновидів рівняння теплопровідності. Для розв'язку диференціальних рівнянь розподілу вертикальних напружень використаний підхід застосування експоненціальної функції, яка дозволяє забезпечувати симетричність розподілу напружень відносно лінії дії зосередженої вертикальної сили і характеризувати структуру самого ґрунтового середовища. Для визначення адекватності розробленої математичної моделі напруженого стану ґрунтового масиву використано зовнішнє навантаження у вигляді сили, заданої нормальною функцією розподілу по поверхні ґрунтового масиву. На основі розробленої математичної моделі отримано функцію розподілу дотичних, нормальних вертикальних і горизонтальних напружень для нормального зовнішнього силового навантаження на ґрунтовий масив. Порівняльний аналіз результатів теоретичних і експериментальних дослідження на дослідному зразку типу дрібний пісок показав високий ступінь адекватності розробленої математичної моделі напруженого стану ґрунтового середовища.

Ключові слова: ґрунт, дисперсне середовище, математична модель, напруження, структура, диференціальні рівняння.

Вступ

У зв'язку з розвідуванням нафтогазових родовищ, дослідженням розповсюдження сейсмічних хвиль, розрахунком споруд на ударні і рухомі навантаження, віброзануренням паль, шпунтів та паль-оболонки для створення фундаментів та опор мостів актуальним є дослідження механічних властивостей ґрунтів [1].

Термін «ґрунт» застосовується в науці і практиці, як узагальнена назва гірських порід, які використовуються в будівництві, сільському господарстві, інженерній геології і дорожньому будівництві [2]. Будь-яка інженерна споруда будується і стоїть на ґрунтовій основі, від властивостей якої залежить її надійність та довговічність. Тому ґрунт є об'єктом дослідження для встановлення умов забезпечення надійності роботи фундаментів споруд, а також для розробки високоєфективних землерийних машин [1], [3].

На сьогодні у зв'язку з ростом потреб будівництва, швидким розвитком науки і техніки, реальною можливістю зміни фізико-механічних властивостей будівельних матеріалів шляхом цілеспрямованої дії на їх структуру, актуальність проблеми дослідження структури і розподілу внутрішніх

навантажень у дослідженні механічних властивостей ґрунту значно зросла.

Наразі знаходить широке застосування математичне моделювання фізичних процесів [4], за допомогою якого можна глибоко і повно досліджувати вплив конструктивних і режимних факторів на основні фізико-механічні характеристики будівельних матеріалів, щоб намітити конкретні шляхи їх поліпшення, істотно знизивши при цьому об'єми експериментальних досліджень [5]. Незважаючи на складність розрахунків і прийнятих у математичному описі робочого процесу допущеннях, які з накопиченням експериментальних даних можуть бути уточнені, перспективність використання таких моделей для підвищення ефективності технологічних процесів будівельно-дорожніх робіт очевидна [6].

У працях [7] представлена математична модель розподілу напружень в ідеальному пружно-ізотропному напівпросторі ґрунтового середовища від прикладених до нього вертикальної зосередженої сили. Дослідження цієї математичної моделі дозволило отримати криволінійну епюру тиску по горизонталі, і в такому співвідношенні якісно відповідало експериментальним даним [8], отриманим у дослідженні розподілу тиску в піщаних ґрунтах. Ці дослідження показали недоліки математичних моделей, які описували розподіл напружень в ґрунтових середовищах під постійним кутом і за рівномірного розподілу його по горизонталі. А це зі свого боку вимагає введення в математичну модель, яка базується на основі положень теорії пружності, емпіричних коефіцієнтів концентрації напружень.

Результати досліджень учених [9] показали, що разом з використанням основних положень теорії пружності ефективнішим є використання основних положень механіки зернових середовищ під час досліджень фізико-механічних властивостей ґрунтів. Зокрема, результати обчислень напружень в піщаному середовищі в два-три рази відрізняються від результатів розрахунку на основі положень теорії пружності.

У праці [10] математична модель розподілу навантажень в ґрунтовому середовищі базується на основі диференціального рівняння рівноваги для суцільного середовища і умови, згідно з якою дотичне напруження в кожній точці є функцією полярного кута, що визначає положення цієї точки відносно початку координат. Такий підхід дозволив суцільному середовищу надати додаткові властивості відмінні властивостей пружного тіла.

Метою роботи є підвищення точності визначення розподілу середніх напружень у ґрунтовому середовищі шляхом розроблення ефективніших методів їхнього математичного моделювання. Це дозволить досягти низки якісних практичних результатів: підвищення достовірності визначення робочих характеристик будівельно-дорожніх споруд в процесі проєктування; можливість розробки будівельно-дорожніх систем з покращеними експлуатаційними характеристиками; зменшення часу на відпрацювання деяких технологій тощо.

Результати дослідження

Під дією зовнішнього навантаження в дисперсному середовищі (ґрунтовий масив) виникає напружений стан, визначення якого базується на системі диференціальних рівнянь рівноваги для плоскої постановки задачі. Для цього виділяється певний об'єм ґрунтового середовища (рис. 1) з розмірами A_x , A_z по відповідних осях z , y і властивістю розподільності [11]. Позаяк ґрунтове середовище має властивість розподільності [11], то може бути введене припущення, що в середньому інтенсивність тиску по верхній грані відрізняється від інтенсивності тиску по нижній грані виділеного елемента. Крім того, точка прикладання рівнодійної сили по верхній грані не буде лежати на одній вертикалі з точкою прикладання рівнодійної по нижній грані.

Позаяк рівнодійні сил по гранях відрізняються за величиною, то цією різницею по боковій поверхні виділеного об'єму створюються перерізуючі (дотичні) сили (напруження). У середині виділеного об'єму зсувні сили

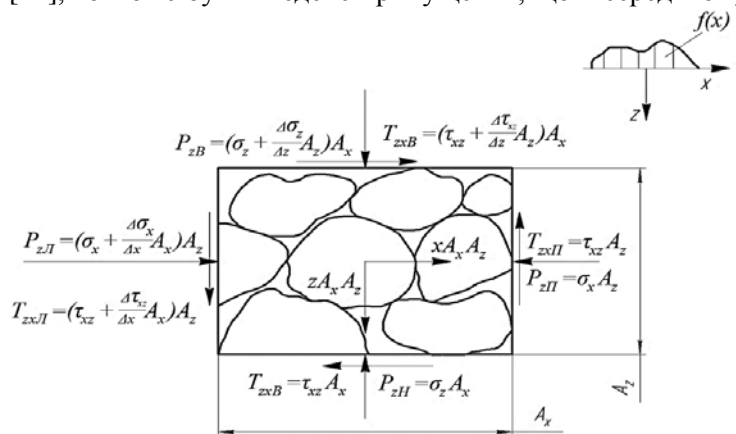


Рис. 1. Розрахункова схема розподілу навантажень у ґрунтовому масиві

сприймають на себе сили тертя між частинками, які забезпечують цілісність ґрунтового масиву. Для врівноваження моменту сил, що утворюється через ексцентриситет між домінуючими вертикальними силами, на бічних гранях виникають горизонтальні сили різної інтенсивності (з урахуванням розподільної здатності середовища). Оскільки горизонтальні сили на гранях мають різні значення, вони викликають горизонтальні (дотичні) сили (напруження) по горизонтальних гранях. Таким чином, рівновага виділеного об'єму зернистого середовища можлива лише за наявності вертикальних, горизонтальних і дотичних сил (напружень).

На рис. 1 подана розрахункова схема виділеного об'єму ґрунтового масиву, що являє собою дисперсне середовище під дією усіх складових напружень. Точки прикладання вертикальних і горизонтальних рівнодійних сил розміщені в центрах граней виділеного об'єму з одночасним врахуванням зміни величин дотичних складових напружень.

Тому при усередненні напружень вертикальна рівнодійна сил:

$$\text{– верхня грань} \quad P_{z\theta} = \left(\sigma_z + \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta z} A_z \right) A_x; \quad (1)$$

де $\Delta\sigma_z/\Delta z$ — приріст нормального напруження $\Delta\sigma_z$ на елементарній площі Δz по осі z .

$$\text{– нижня грань} \quad P_{zH} = \sigma_z A_x. \quad (2)$$

Аналогічно для горизонтальних рівнодійних сил:

$$\text{– ліва грань} \quad P_{x\ell} = \left(\sigma_x + \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} A_x \right) A_z; \quad (3)$$

де $\Delta\sigma_x/\Delta x$ — приріст нормального напруження $\Delta\sigma_x$ на елементарній площі Δx по осі x .

$$\text{– права грань} \quad P_{xH} = \sigma_x A_z. \quad (4)$$

Рівнодійна сила від дотичних напружень:

$$\text{– верхня грань} \quad T_{z\theta} = \left(\tau_{zx} + \frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z} A_z \right) A_x; \quad (5)$$

де $\Delta\tau_{zx}/\Delta z$ — приріст дотичного напруження $\Delta\tau_{zx}$ на елементарній площі Δz по осі z .

$$\text{– нижня грань} \quad T_{zH} = \tau_{zx} A_x. \quad (6)$$

Аналогічно для рівнодійних дотичних напружень по бічних гранях:

$$\text{– ліва грань} \quad T_{x\ell} = \left(\tau_{xz} + \frac{\Delta\tau_{xz}}{\Delta x} A_x \right) A_z; \quad (7)$$

де $\Delta\tau_{xz}/\Delta x$ — приріст дотичного напруження $\Delta\tau_{xz}$ на елементарній площі Δx по осі x .

$$\text{– права грань} \quad T_{xH} = \tau_{xz} A_z. \quad (8)$$

Крім того, до виділеного об'єму в його центрі прикладаються об'ємні сили: горизонтальну XA_xA_z і вертикальну ZA_xA_z . Тоді сума моментів усіх сил відносно точки A

$$-\tau_{xz} A_z \frac{A_x}{2} + \left(\tau_{zx} + \frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z} A_z \right) A_x \frac{A_z}{2} - \left(\tau_{xz} + \frac{\Delta\tau_{xz}}{\Delta x} A_x \right) A_z \frac{A_x}{2} + \tau_{zx} A_x \frac{A_z}{2} = 0. \quad (9)$$

Після приведення подібних членів буде отримано

$$-\tau_{xz} + \tau_{zx} + \frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z} \frac{A_z}{2} - \frac{\Delta\tau_{xz}}{\Delta x} \frac{A_x}{2} = 0. \quad (10)$$

Проекція усіх сил на вісь x

$$-\sigma_x A_z + \left(\sigma_x + \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} A_x \right) A_z - \tau_{xz} A_x + \left(\tau_{zx} + \frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z} A_z \right) A_x + XA_x A_z = 0, \quad (11)$$

а після скорочення отримаємо

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z} + X = 0. \quad (12)$$

Аналогічно виражається рівняння рівноваги шляхом проектування усіх сил на вертикальну вісь

$$\frac{\Delta\sigma_z}{\Delta z} + \frac{\Delta\tau_{xz}}{\Delta x} + Z = 0. \quad (13)$$

Рівняння (10), (12), (13), представлені в формі кінцевих різниць, приводяться до диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} -\tau_{xz} + \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \frac{A_z}{2} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} \frac{A_x}{2} = 0, \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0, \\ \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Позаяк розміри виділеного елемента $A_x, A_z \rightarrow 0$, то з рівняння (10) отримуємо, що $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Більше того, система диференціальних рівнянь (14) справедлива й для дуже малого елемента $dx dy$. Тоді для цієї задачі система диференціальних рівнянь рівноваги дисперсного середовища матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0, \\ \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогічно буде отримана система диференціальних рівнянь рівноваги для дисперсного середовища в просторовій постановці задачі.

Розпірне зернисте середовище відрізняється від безрозпірного тим, що в ньому відсутня жорстка підпорядкованість площин, відносно яких розташовані дисперсні елементи один до другого. У цьому середовищі структура, утворена взаємним розташуванням дисперсних частинок, в середньому однакова в усіх напрямках, тому для рівнянь (15) значення об'ємних сил приймається $X = Z = 0$.

Через наявність властивостей типового середовища приймається принцип прямолінійного поширення внутрішнього тиску [12]. У випадку дії зосередженої вертикальної сили на ґрунтовий масив (див. рис. 1) цей принцип виражається співвідношеннями

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{x^2}{z^2} \sigma_z, \\ \tau_{xz} = \frac{x}{z} \sigma_z. \end{cases} \quad (16)$$

З переходом від одного зернистого середовища до іншого виконується принцип спадковості, який полягає в ідентичності результатів розв'язку для розпірного і безрозпірного середовищ. Тому на основі результатів досліджень [13], розв'язок задачі розподілу вертикальних напружень в розпірному дисперсному середовищі визначатиметься у вигляді

$$\sigma_z = -P \frac{1}{\sqrt{2\pi v z^k}} \exp\left(-\frac{x^2}{2v z^k}\right). \quad (17)$$

Аргумент x^2 експоненціальної функції (17) забезпечує симетричність розподілу напружень відносно лінії дії зосередженої вертикальної сили, а параметр v характеризує структуру середовища. Для визначення коефіцієнта k у рівнянні (17) необхідно, щоб виконувалась умова рівноваги (15) і співвідношення (16). Для визначення коефіцієнта k необхідно продиференціювати перше рівняння системи диференціальних рівнянь (16) по x

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\sigma_z}{z} + \frac{x}{z} \frac{\partial\sigma_z}{\partial x}. \quad (18)$$

Рівняння (18) підставляється в перше рівняння системи (15)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_z}{z} + \frac{x}{z} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Також необхідно продиференціювати функцію (17), як по z так і по x

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -P \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \left(\frac{k}{2z\sqrt{z^k}} + \frac{kx^2}{2vz^{k+1}\sqrt{z^k}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^k}\right), \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{Px}{vz^k \sqrt{2\pi v z^k}} \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^k}\right). \end{cases} \quad (20)$$

Підставляючи значення похідних від σ_x та σ_z з рівняння (20) в рівняння (19), отримаємо

$$-\frac{P}{\sqrt{2\pi v}} \left(-\frac{k}{2z\sqrt{z^k}} + \frac{kx^2}{2vz^{k+1}\sqrt{z^k}} \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^k}\right) - \frac{P}{z\sqrt{2\pi v z^k}} \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^k}\right) + \frac{x}{z} \frac{Px}{\sqrt{2\pi v z^k} z^k} \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^k}\right) \right) = 0$$

або після перетворень $\left(\frac{k}{2} - 1\right) \left(1 + \frac{x^2}{z^k}\right) = 0$.

Звідки $\frac{k}{2} - 1 = 0$, а отже $k = 2$. Тоді рівняння (17) буде мати такий вигляд:

$$\sigma_z = -\frac{P}{z\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2}{2vz^2}\right). \quad (21)$$

На основі виразу (21) може бути записаний вираз для напружень від вертикального навантаження, довільно розподіленого по горизонтальній площині в межах від $-a$ до $+a$

$$\sigma_z = -\frac{1}{z\sqrt{2\pi v}} \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi, \quad (22)$$

де $f(\xi)$ — функція, що описує характер розподілу навантаження, ξ — змінна інтегрування.

Припустимо, що в загальному випадку дотичні напруження зв'язані з вертикальними такою залежністю:

$$\tau_{xz} = F(z) \frac{\partial \sigma_z}{\partial x}. \quad (23)$$

Для визначення функції $F(z)$ використовується рівняння рівноваги (15) і функція (22). Для цього функція (22) диференціюється по z

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \left[-\frac{1}{z^2} \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi + \frac{(x-\xi)^2}{vz^4} \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi \right] = \\ & -\frac{1}{z^2 \sqrt{2\pi v}} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} \right) \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Також необхідно продиференціювати рівняння (23) по x

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = F(z) \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}. \quad (25)$$

Додатково диференціюється рівняння (22) двічі по x

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = -\frac{1}{vz^3 \sqrt{2\pi v}} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} \right) \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi. \quad (26)$$

Підставляємо (24)—(26) в перше рівняння системи (15)

$$\left[\frac{1}{z^2 \sqrt{2\pi v}} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} \right) + \frac{F(x)}{vz^3 \sqrt{2\pi v}} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} \right) \right] \int_{-a}^{+a} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2vz^2}\right) d\xi = 0$$

або

$$1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} + \frac{F(z)}{vz} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{vz^2} \right) = 0, \quad (27)$$

звідки $F(z) = vz$. Тоді залежність (23) набуде вигляду

$$\tau_{xz} = -vz \frac{\partial \sigma_z}{\partial x}. \quad (28)$$

Продиференціювавши залежність (28) по x і підставивши в перше рівняння системи (15), отримаємо вираз аналога рівняння теплопровідності [8], яке зі свого боку описує розподіл вертикальних напружень в дисперсному середовищі

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = vz \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}. \quad (29)$$

Для визначення σ_x використовується друге рівняння системи (15). Якщо продиференціювати залежність (28) по z , то буде отримано

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(v\sigma_z + vz \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \quad (30)$$

Підставляючи вираз (30) у друге рівняння системи (15), отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(v\sigma_z + vz \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (31)$$

Звідки отримують залежність для нормальних напружень по горизонтальній осі

$$\sigma_x = v\sigma_z + vz \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (32)$$

Якщо на поверхні напівплощини діє рівномірно розподілене навантаження, тоді $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$ і $\sigma_x = v\sigma_z$, звідки випливає, що v є коефіцієнтом бокового тиску в дисперсному середовищі.

Для визначення адекватності розробленої математичної моделі напруженого стану ґрунтового масиву використано зовнішнє навантаження у вигляді сили, яка задана функцією розподілу по поверхні ґрунтового масиву

$$f(x) = P_1 \exp(-C_1 x^2), \quad (33)$$

де P_1 і C_1 — сталі параметри функції.

З рівняння (22) визначається [8], [14] функція нормальних вертикальних напружень від дії заданого навантаження (33)

$$\sigma_z = -\frac{P_1}{\sqrt{1+2vC_1z^2}} \exp\left(-\frac{C_1x^2}{1+2vC_1z^2}\right). \quad (34)$$

З рівняння (29) визначається [8], [15] функція дотичних напружень від дії заданого навантаження (33)

$$\tau_{xz} = \frac{2C_1vxz}{1+2vC_1z^2} \sigma_z. \quad (35)$$

З рівняння (32) визначається [8] функція нормальних горизонтальних напружень від дії заданого навантаження (33)

$$\sigma_x = v \left(1 + \frac{4C_1^2vx^2z^2}{(1+2vC_1z^2)^2} - \frac{2C_1vz^2}{1+2vC_1z^2} \right) \sigma_z, \quad (36)$$

де значення σ_x визначається з виразу (34).

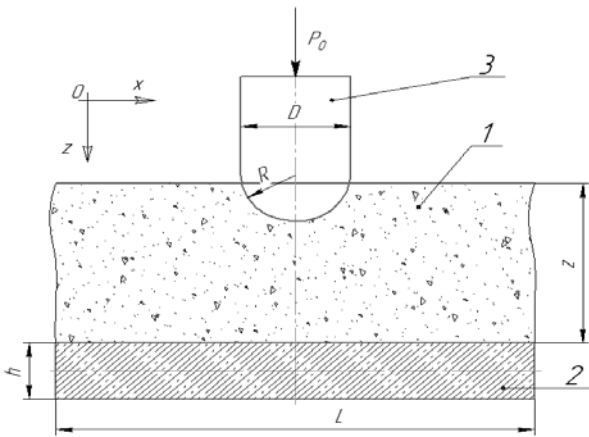


Рис. 2. Типова схема експериментального стенду для вимірювання значень нормального напруження грунтового середовища

З метою порівняння результатів теоретичного дослідження (34)—(36) отримані дані на експериментальному стенді (рис. 2) для грунтового середовища 1 типу дрібний пісок [9]. Навантаження здійснювалось через штамп 3 радіусом $R = 0,172$ м. Грунтове середовище вкладалося на масивну бетонну плиту 2 розміром $L \times l \times h = 2,20 \times 2,25 \times 0,40$ м. Тиск вимірювався за допомогою важільних вагів (діаметр поршня $D = 10,5$ см). На рис. 3 подано результати теоретичного і експериментального досліджень для зразків грунтового масиву (дрібний пісок) глибиною $z_1 = 15,2$ см і $z_2 = 30,5$ см відповідно. Значення середнього тиску на штамп $P_0 = 39,4$ кПа.

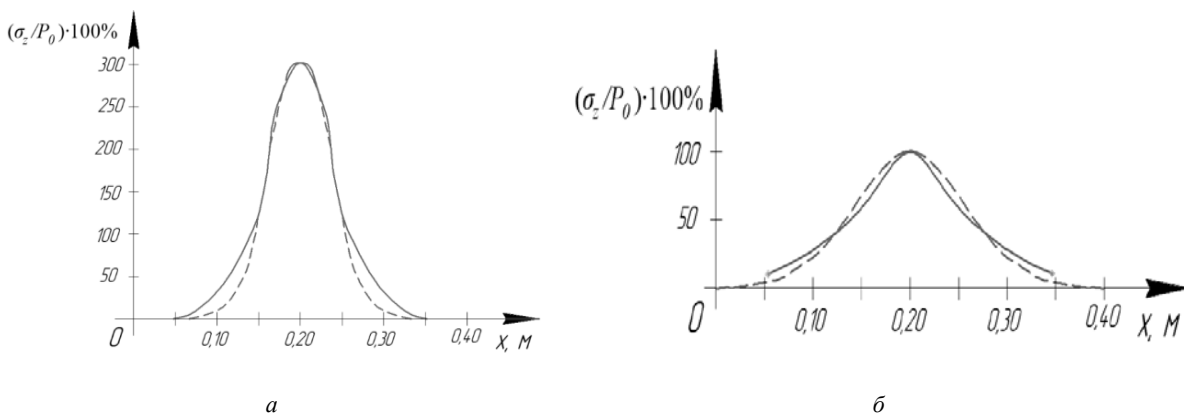


Рис. 3. Діаграми результатів теоретичного і експериментального досліджень розподілу вертикального навантаження в грунтовому середовищі типу сухий пісок товщиною: а — $z_1 = 0,152$ м; б — $z_2 = 0,305$ м; — — — — теоретичні дані, — — — — експериментальні дані

Результат порівняння теоретичних і експериментальних даних (див. рис. 3) розподілу вертикального навантаження в грунтовому середовищі типу сухий пісок показує розбіжність на рівні 8,7%. Найбільша розбіжність у вертикальних напруженнях відмічається тільки на краях кривої (для малих напружень).

Висновки

Розроблена математична модель розподілу напружень для ґрунтових середовищ базується на моделі лінійно-деформованого тіла. Зі свого боку, запропонована математична модель розподілу напружень для безрозпірних (блочних) і розпірних дисперсних середовищ як процес є розв'язками диференціальних рівнянь параболічного типу за відповідних граничних умов. Основою для розв'язання диференціальних рівнянь параболічного типу є гіпотеза про нормальний (гаусовий) розподіл тиску, що дозволяє врахувати вплив сукупності (як статистична характеристика) різних за розміром дисперсних частинок на розподіл напружень, а також нерівномірність передачі зусиль від частинок, які розміщені на різній висоті ґрунтового масиву (випадковий характер).

Загалом, порівняльні результати теоретичних і експериментальних даних дозволяють з високим ступенем адекватності на рівні 8,7% використовувати розроблену математичну модель для визначення розподілу навантаження в грунтовому середовищі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Р. Д. Іскович-Лотоцький, і Я. В. Іванчук, «Підвищення ефективності розвантаження матеріалів під дією періодичних ударних імпульсів», *Вібрації в техніці і технологіях*, № 2 (51), с. 8-11, 2008.
- [2] М. Н. Гольдштейн, А. А. Царьков, и И. И. Черкасов, *Механика ґрунтов, основания и фундаменты*. М.: Транспорт, 1981, 342 с.

- [3] Р. Д. Іскович-Лотоцький, і Я. В. Іванчук, «Дослідження динаміки процесу роботи універсального гідравлічного віброударного приводу для розвантаження транспортних засобів,» *Наукові нотатки. Міжвузівський збірник* (за напрямом «Інженерна механіка»), Луцьк, № 20, с. 184-187, 2007.
- [4] Rostislav D. Iskovych-Lototsky, et al. "Automatic system for modeling vibro-impact unloading bulk cargo on vehicles," *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018*, 1080860 (1 October 2018). <https://doi.org/10.1117/12.2501526> .
- [5] Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Yaroslav P. Veselovsky, Konrad Gromaszek, and Ayaulym Oralbekova, "Automatic system for modeling of working processes in pressure generators of hydraulic vibrating and vibro-impact machine," *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018*, 1080850 (1 October 2018). <https://doi.org/10.1117/12.2501532> .
- [6] Р. Д. Іскович-Лотоцький, Я. В. Іванчук, і Я. П. Веселовський, «Основи резонансно-структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів,» *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна*, № 5 (53), с. 109-118, 2014. <https://doi.org/10.15802/stp2014/30458> .
- [7] J. Feda, "Mechanics of particulate materials. The principles,," *Development in geotechnical engineering*, vol. 30. Czechoslovak Academy of sciences, Institute of theoretical and applied mechanics, Prague. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, 1982.
- [8] И. И. Кандауров, *Механика зернистых сред и ее применение в строительстве*, 2-е изд., испр. и перераб. Л.: Стройиздат, Ленингр. Отд-ние, 1988, 280 с.
- [9] S. Matysiak, and P. Pusz, "Axisymmetric bousinesg problem for a granular hal," *Bulletin of Polish Academie of Sciences, Technical Sciences*, no. 33 (7/8), pp. 351-358, 1985.
- [10] J. Israelachvili, *Intermolecular and Surface Forces*, London: Academic Press, 1985-2004.
- [11] N. A. Perestiuk, *Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities*. Berlin, Deutschland: De Gruyter, 2011.
- [12] D. I. Zolotarevskaya, "Mathematical simulation and calculation of the soil compaction under dynamic loads," *Eurasian Soil Science*, № 44 (4), pp. 407-416, 2011. <https://doi.org/10.1134/s1064229311040144> .
- [13] M. Krausz, *Methode zur Abschätzung der Ergebnisqualität von modularen Gesamtfahrzeugsimulationsmodellen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017.
- [14] A. Li, F. Dai, N. Xu, G. Gu, and Z. Hu, "Analysis of a Complex Flexural Toppling Failure of Large Underground Caverns in Layered Rock Masses," *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00603-019-01760-5>.
- [15] С. Debeleac, and S. Nastac, "Stochastic Approaches of Nonlinear Model-Based Simulations for Vibratory Compaction Process," *РАММ*, vol. 14 (1), pp. 749-750, 2014. <https://doi.org/10.1002/pamm.201410357>.

Рекомендована кафедрою опору матеріалів та прикладної механіки ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 4.02.2021

Іванчук Ярослав Володимирович — д-р техн. наук, доцент, професор кафедри комп'ютерних наук, e-mail: ivanchuck@ukr.net ;

Іскович-Лотоцький Ростислав Дмитрович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри галузевого машинобудування, e-mail: islord@gmail.com ;

Замковий Олександр Дмитрович — аспірант кафедри комп'ютерних наук, e-mail: 2knzamkovyi@gmail.com ;

Павлович Роман Ігорович — аспірант кафедри комп'ютерних наук, e-mail: pavlovich.roma97@gmail .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця;

Добровольська Катерина В'ячеславівна — канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри біологічної фізики, медичної апаратури та інформатики, e-mail: viekurs@ukr.net .

Вінницький національний медичний університет ім. М. І. Пирогова, Вінниця

Ya. V. Ivanchuk¹
R. D. Iskovych-Lototskyi¹
K. V. Dobrovol'ska²
O. D. Zamkovyi¹
R. I. Pavlovyh¹

Mathematical Modeling of the Soil Environment Stress State

¹Vinnitsia National Technical University;

²National Pyrogov Memorial Medical University

A mathematical model has been developed that describes the stress state of the soil environment. The basic calculation model of the soil massif is presented in the form of a dispersed medium. Its stress state is described by a discrete-continuum model under the action of all stress components. This approach made it possible to use the main provisions of the theory of elasticity to construct a system of differential equations for the equilibrium of a disperse medium in a plane formulation of the problem. It also makes it possible to use the probabilistic properties of dispersed media to solve systems of differential equations that describe the distribution of stresses in a spacer dispersive medium with a distributive property. When an external load in the form of a concentrated force is applied to the soil mass, a differential equation for the distribution of the vertical normal stress of a parabolic type was obtained. It is one of the varieties of the heat equation. To solve the differential equations for the distribution of vertical stresses, the approach of applying an exponential function is used. It allows to ensure the symmetry of the distribution of stresses with respect to the line of action of the concentrated vertical force. It also allows characterizing the structure of the soil environment itself. To determine the adequacy of the developed mathematical model of the stress state of the soil mass, an external load in the form of a force was used. This force is given as a normal distribution function over the surface of the soil mass. Based on the developed mathematical model, the distribution function of tangential, normal vertical and horizontal stresses was obtained for a normal external force load on the soil mass. A comparative analysis of the results of theoretical and experimental studies on a prototype fine sand type showed a high degree of adequacy of the developed mathematical model of the stress state of the soil environment.

Keywords: soil, disperse medium, mathematical model, stress, structure, differential equations.

Ivanchuk Yaroslav V. — Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Professor of the Chair of Computer Sciences, e-mail: ivanchuck@ukr.net ;

Iskovych-Lototskyi Rostyslav D. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Industrial Engineering, e-mail: islord@gmail.com ;

Dobrovol'ska Kateryna V. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Biophysics, Medical Equipment and Informatics, e-mail: viekurs@ukr.net ;

Zamkovyi Oleksandr D. — Post-Graduate Student of the Chair of Computer Sciences, e-mail: 2knzamkovyi@gmail.com ;

Pavlovyh Roman I. — Post-Graduate Student of the Chair of Computer Sciences, e-mail: pavlovich.roma97@gmail