https://doi.org/10.31649/1997-9266-2024-175-4-122-128

УДК 517.977.1

А. В. Савранська[1]
М. В. Шевчук[1]

ПОБУДОВА СПОСТЕРІГАЧА ВЕКТОРА СТАНУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

Усі об'єкти керування є в будь-якому випадку невизначеними. Невизначеності суттєвим чином впливають на працездатність системи керування та можуть спричинити її втрату. Тому для якісного керування будь-яким об'єктом необхідно знати вектор його стану. Це дозволяє організувати керування, що забезпечує ефективну роботу системи. Ця задача розв'язується за допомогою оцінки вектора стану системи, що викликає необхідність створення спостерігачів.

Задачі керування запасами орієнтовані на підтримання балансу між уникненням дефіциту товарів та загальним зменшенням залишків шляхом їхнього ефективного розподілу між окремими групами товарів або між підрозділами підприємства.

Побудовано дискретну систему керування залишками товарів підприємства, яка складається з різницевого рівняння вектора стану системи, рівняння оцінки цього стану, вектора керування, який складається з витрат, спрямованих на поповнення залишків товарів. Заздалегідь будується матриця прогнозу продажів на основі історичних даних підприємства за декілька попередніх років

Метою дослідження є створення регулятора для системи керування залишками, який для будь-якого періоду часу враховує реальних стан системи. Для цього створюється спостерігач вектора стану повного порядку, який відслідковуючи спостережуваний вихід системи, корелює вектор керувальних впливів та значення вектора стану системи. Вектор керування — це вектор витрат, необхідних для формування кількості залишків по групах товарів на рівні, який дозволяє досягати прогнозного обсягу продажів.

Наукова новизна дослідження полягає у створенні спостерігача вектора стану повного порядку в таких системах керування запасами, для яких основною задачею є дотримання прогнозних значень продажів. Спостерігач дозволяє корегувати вектор керувальних впливів таким чином, щоб у відповідності до реального рівня запасів створити ефективний розподіл ресурсу по групах товарів з метою уникнення дефіциту товару та досягнення найповнішого задоволення потреб клієнтів.

Результати цього дослідження апробовані на малому підприємстві оптової торгівлі, що дозволило підвищити ефективність планування закупівель.

Ключові слова: дискретні системи керування, спостерігачі вектора стану, керування запасами, різницеві рівняння.

Вступ

Малий бізнес є важливою частиною економіки будь-якої країни, опорою для середнього класу та надійним джерелом наповнення державних бюджетів. В Україні малий та середній бізнес стрімко розвивається, забезпечуючи стабільність ринкових відносин, залучаючи більшу частину громадян країни в систему відносин шляхом відкриття ними власної справи, що дає можливість населенню країни забезпечити власними силами свою економічну самостійність та добробут.

Існує багато факторів, що суттєво впливають на ефективність роботи малих підприємств. Серед цих факторів важливими є: правильне керування залишками товару на складах компанії, вчасне їхнє поповнення з метою уникнення дефіциту товару, зниження загальних витрат, підтримання необхідного рівня запасів для найповнішого задоволення потреб клієнтів.

Задачі ефективного керування товарними запасами досліджено і висвітлено у багатьох наукових роботах. Досить розповсюдженим є підхід, що ґрунтується на використанні теорії оптимального керування. В роботі [1] розглядається дискретна модель керування, що описується за допомогою різницевих рівнянь, формується та досліджується критерій ефективності, який дозволяє мінімізувати загальні затрати на керування торговельними запасами.

Основною метою дослідження в статті [2] є визначення та розрахунок оптимального виробництва та купівлі низки продуктів в умовах, коли виробництво має певні обмеження. В роботі [3] представлена багаторівнева модель керування запасами, за умови контролю за станом системи. Метою керування є оптимізація критерію, що мінімізує загальні витрати поповнення та зберігання товарних запасів.

Для розв'язання задач керування велике значення має наявність в системі керування оберненого зв'язку. Але не завжди все змінні стану доступні до вимірювання. Тому виникає потреба відновлювати потрібні координати за інформацією, що міститься у вхідних та вихідних змінних стану. Для цієї мети використовуються спостерігачі вектора стану.

Побудова спостерігачі вектора стану для дискретних систем керування має свої особливості. В монографії [4] описана загальна теорія дискретних систем керування, в окремому розділі розглянуто спостерігачі вектора стану.

Спостерігачі вектора стану для нелінійних дискретних систем побудовані в роботі [5]. Автори статті запропонували новий метод проектування спостерігача для нелінійних систем з дискретними вимірюваннями. Цей метод гарантує прямування до нуля похибки спостерігача вектора стану системи.

Сформульована загальна задача побудови регулятора координатами вектора стану. Оскільки на систему діють не повністю відомі зовнішні впливи, виникає необхідність спостереження за поточними значеннями координат вектора стану

Метою дослідження є створення алгоритму, який дозволить ефективно керувати залишками товарів на складах малого підприємства в умовах, коли на систему діють зовнішні впливи. Сформовані різницеві рівняння, що описують вектор стану цієї системи. З метою коригування вектора керувальних впливів запропоновано створювати спостерігач вектора стану повного порядку, який забезпечить прямування до нуля похибки між оцінкою вектора стану та реальним значення цього вектора, отриманим шляхом вимірювання вихідного сигналу.

Результати дослідження

Розглянемо задачу керування запасами (залишками складів) торговельного підприємства. Вважаємо, що підприємство має n видів продукції. Періодом функціонування системи керування вибираємо один рік. Позначимо через l — кількість проміжків часу з цього періоду.

Інформацію про стан системи можна отримувати у фіксовані моменти часу (кінець тижня, місяця тощо). Вважаємо, що на початок досліджуваного періоду нам відома матриця *прогнозних залишків товару* розміром $n \times l$, тобто матриця, елементами якої є залишки (суми в гривнях), розподілені по n групах товарів, достатні для того, щоб здійснити прогнозні продажі

$$Z^* = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1l} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nl} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Прогнозні продажі розраховуються заздалегідь на основі історичних даних за декілька попередніх років. Необхідно побудувати вектор керування (регулятор) координатами вектора стану, який би враховував значення *прогнозних залишків товару*, стан системи у поточний період та розмір наявного ресурсу (сума в гривнях, яку можливо використати для поповнення запасів товару).

Процес керування запасами торговельного підприємства опишемо таким чином: вектор залишків товарів у (k+1)-й період часу має дорівнювати залишкам у k-й період мінус значення вартості товарів, проданих зі складів компанії в (k+1)-й період і плюс величина ресурсів (суми в гривнях), що витрачаються на поповнення запасів товару. Таким чином, задачу керування запасами можна записати у вигляді різницевого рівняння

$$s(k+1) = s(k) + B(k)u(k) - w(k+1), \tag{2}$$

де

$$s(k) = \{s_1(k),\ s_2(k), \dots, s_n(k)\}^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots l-1 \ — \tag{3}$$

— *вектор стану системи керування* (залишки товарів, рознесених по групах на кінець k-го періоду часу);

$$u(k)=\{u_1(k),u_2(k),\ldots,u_n(k)\}^T, \quad k=0,1,2,\ldots l-1 \quad — \tag{4}$$

— *вектор керування* системою (ресурси, що витрачаються на поповнення запасів товару в k-й період часу),

$$w(k)=\{w_1(k),w_2(k),\ldots,w_n(k)\}^T, \quad k=0,1,2,\ldots l-1 \quad — \tag{5}$$

— *вектор вартостей проданого товару* (по групах) в k-й період часу;
$B(k)$ — матриця додаткових витрат на поповнення запасів товару (банківські послуги, витрати на транспортування та зберігання тощо). $B(k)$ — це діагональна матриця розміром $n\times n$, коефіцієнти головної діагоналі якої задовольняють умові

$$b_i(k)\ge 1; \ \ i=1,2,\ldots n. \tag{6}$$

Оскільки значення вартості товарів, проданих зі складів ($k+1$)-й період невідомі на початку цього періоду, вважатимемо

$$w(k+1)=z^*(k+1), \quad k=0,1,2,\ldots,l-1, \tag{7}$$

де $z^*(k+1)$ — ($k+1$)-й стовпець матриці Z^*. Тобто $w(k+1)$ дорівнює прогнозному значенню залишків.

Тоді
$$w_i(k+1)==\frac{z_i^*(k+1)}{s_i(k)}s_i(k)=a_i(k)s_i(k). \tag{10}$$

Враховуючи (10), систему (2) можна записати у вигляді

$$s(k+1)=A(k)s(k)+B(k)u(k), \quad k=0,1,2,\ldots l-1. \tag{11}$$

де $A(k)$ — діагональна матриця з елементами головної діагоналі вигляду

$$1-a_i(k), \ i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Вектор стану на початку досліджуваного періоду дорівнює

$$s(0)=s^0. \tag{13}$$

Вектор керування $u(k)$ для системи (11) шукатимемо у вигляді

$$u(k)=P(k)s(k), \tag{14}$$

де $P(k)$ — діагональна матриця розмірності $n\times n$, коефіцієнти якої вибираються за умов, щоб величини залишків товарів в ($k+1$)-й період часу дорівнювали прогнозним значенням залишків, обчислених для того же періоду.

Система (11)—(14) обчислює коефіцієнти вектора F керування (вектор витрат, необхідних для поповнення залишків товарів) для всіх періодів часу з досліджуваного періоду, враховуючи тільки значення з матриці прогнозу залишків (1) та початкову умову (13).

В процесі функціонування системи (11)—(14) на неї можуть впливати зовнішні обставини (втрата частини товару, переміщення сезонного товару у резерв, незбіг обсягу продажів товарів з прогнозними і т. п.). Тому для правильної роботи системи необхідно спостерігати поточне значення вектора стану (вихід системи), реальне значення сумарного ресурсу у кожний період часу та мати можливість коригувати вектор керувальних впливів та значення стану системи. Цю задачу можна розв’язати за допомогою побудови спостерігача вектора стану повного порядку.

Нехай у нашому розпорядженні є:

а) керований об’єкт

$$s(k+1)=A(k)s(k)+B(k)u(k)+f(k), \ k=0,1,2,\ldots l-1, \tag{15}$$

де $f(k)=\{f_1(k),f_2(k),\ldots,f_n(k)\}^T$, $k=0,1,2,\ldots l-1$ — вектор зовнішніх впливів;

б) доступний для вимірювання вихідний сигнал

$$y(k)=\{y_1(k), y_2(k),\dots, y_n(k)\}^T, \quad k=0,1,2,\dots l-1; \tag{16}$$

в) доступний для вимірювання вхідний сигнал $u(k)$.

На основі знання вхідного та вихідного сигналів та можливості обчислення коефіцієнтів матриць $A(k)$ і $B(k)$, оцінюватимемо вектор стану об'єкта керування (15). Позначимо через

$$\hat{s}(k)=\{\hat{s}_1(k), \hat{s}_2(k),\dots, \hat{s}_n(k)\}^T, \quad k=0,1,2,\dots l \tag{17}$$

оціночне значення вектора $s(k)$. Оцінка $\hat{s}(k)$ містить похибку, якщо вона відрізняється від результату, отриманого реальним вимірюванням сигналу $y(k)$.

Назвемо *похибкою оцінювання*

$$\tilde{s}(k)=\hat{s}(k)-y(k). \tag{18}$$

Задача спостереження зводиться до того, щоб звести похибку $\hat{s}(k)-y(k)$ до нуля.

Оцінимо вектор стану $s(k)$ системи (15)—(16)

$$\hat{s}(k+1)=A(k)\hat{s}(k)+B(k)u(k); \tag{19}$$

$$\hat{s}(0)=s^0. \tag{20}$$

Недоліком цієї моделі є те, що вона діє у розімкнутому циклу та після деякого часу роботи рівняння (19) дає занадто неточну оцінку вектора $s(k)$. Для того, щоб уникнути цього недоліку, пропонується похибку $\hat{s}(k)-y(k)$ ввести в праву частину рівняння (19), тобто перейти до оцінювального пристрою

$$\hat{s}(k+1)=A(k)\hat{s}(k)+B(k)u(k)+L(k)\left(\hat{s}(k)-y(k)\right), \tag{21}$$

де $L(k)$ — діагональна матриця розміру $n\times n$ з елементами головної діагоналі

$$l_i(k),\ i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Коли в (21) $\hat{s}(k)\to y(k)$, рівняння (21) називають *спостерігачем*, а матрицю $L(k)$ — *матрицею коефіцієнтів посилення спостерігача*.

Відніманням з (21) рівняння (15), отримаємо рівняння для похибки оцінювання

$$\tilde{s}(k+1)=\left[A(k)+L(k)\right]\tilde{s}(k)-f(k),\ k=0,1,2,\dots l-1. \tag{23}$$

Для розв'язування задачі синтезу спостерігача необхідно забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (23), вибираючи коефіцієнт матриці $L(k)$. Оскільки корені характеристичного багаточлена матриці $A(k)+L(k)$ дорівнюють

$$\lambda_i(k)=1-a_i(k)+l_i(k) \tag{24}$$

для асимптотичної стійкості вільного руху дискретної системи (23), необхідно та достатньо виконання умови

$$\left|\lambda_i(k)\right|<1,\ i=1,\dots n \tag{25}$$

або
$$\left|1-a_i(k)+l_i(k)\right|<1;$$

$$a_i(k)-2<l_i(k)<a_i(k). \tag{26}$$

Як коефіцієнти $l_i(k)$ візьмемо значення з діапазону $\left(a_i(k)-2;\ a_i(k)\right)$. Наприклад,

$$l_i(k)=a_i(k)-1. \tag{27}$$

В цьому випадку оцінку вектора стану $\hat{s}(k)$ можна певною мірою ототожнювати з $s(k)$ та формувати закон керування у вигляді

$$u(k) = P(k)\hat{s}(k).$$

Враховуючи вищесказане, запишемо дискретну систему керування запасами товарів на складі торговельного підприємства зі спостерігачем стану повного порядку

$$s(k+1) = A(k)s(k) + B(k)u(k) + f(k), \ k = 0,1,2,\ldots l-1. \quad (28)$$

$$y(k) = s(k); \quad (29)$$

$$\hat{s}(k+1) = A(k)\hat{s}(k) + B(k)u(k) + L(k)(\hat{s}(k) - y(k)); \quad (30)$$

$$s(0) = \hat{s}(0) = s^0; \quad (31)$$

$$u(k) = P(k)\hat{s}(k). \quad (32)$$

Елементи $p_i(k)$, $i = 1, 2,\ldots n$ діагональної матриці $P(k)$ вибираються такими, щоб величини залишків $\hat{s}_i(k)$ товарів в моделі об'єкта (30) в (k+1)-й період часу дорівнювали прогнозним значенням залишків, обчислених для цього ж періоду. Тобто має виконуватися рівність

$$\hat{s}(k+1) = z^*(k+1), \quad (33)$$

де $z^*(k+1)$ — (k+1)-й стовпець матриці прогнозу залишків (1).

Підставимо в ліву частину рівняння (33) значення $\hat{s}(k)$ з рівняння (30), отримаємо

$$A(k)\hat{s}(k) + B(k)u(k) + L(k)(\hat{s}(k) - y(k)) = z^*(k+1). \quad (34)$$

Перепишемо (34) у вигляді системи n рівнянь

$$(1 - a_i(k))\hat{s}_i(k) + b_i(k)u_i(k) + l_i(k)(\hat{s}_i(k) - y_i(k)) = z_i^*(k+1), \ i = 1, 2,\ldots, n. \quad (35)$$

В рівняння (35) підставимо відповідне значення вектора $u(k)$, а саме $u_i(k) = p_i(k)\hat{s}_i(k)$. Отримаємо

$$(1 - a_i(k) + b_i(k)p_i(k))\hat{s}_i(k) + l_i(k)(\hat{s}_i(k) - y_i(k)) = z_i^*(k+1), \quad i = 1, 2,\ldots, n. \quad (36)$$

Враховуючи, що $a_i(k) = \dfrac{z_i^*(k+1)}{s_i(k)}$ та елементи $l_i(k)$ обчислюються за формулою (27), з рівняння (36) визначимо

$$p_i(k) = \frac{a_i(k)s_i(k) + (a_i(k) - 1)y_i(k)}{b_i(k)\hat{s}_i(k)}. \quad (37)$$

Тоді елементи вектора керування (33) набудуть вигляду

$$u_i(k) = \frac{a_i(k)s_i(k) + (a_i(k) - 1)y_i(k)}{b_i(k)}. \quad (38)$$

Отже, елементи вектора (38) — це суми, які необхідно витратити, щоб досягти в (k+1)-му періоді прогнозних продажів, по кожній групі товару.

Результати дослідження, викладені в цій статті, використано малим виробничо-торговельним підприємством «Саванна» (м. Запоріжжя), яке продає та виробляє трикотажні вироби для планування закупівлі товару в квітні 2024 року.

Товарні запаси підприємства складаються з 6 основних груп товару. Для них побудовано матрицю прогнозу залишків Z^*, розмірності 6×12. Одиниця вимірювання в матриці Z^* — гривня.

$$Z^* = \begin{pmatrix} 104236 & 108687 & 137157 & 210302 & 155457 & 204491 & 173444 & 186002 & 136446 & 89248 & 57048 & 89028 \\ 70440 & 65978 & 68221 & 75606 & 103021 & 66976 & 53616 & 103603 & 166544 & 214852 & 229671 & 144121 \\ 59889 & 57369 & 70018 & 40651 & 41504 & 42096 & 17330 & 31629 & 235225 & 168545 & 253431 & 146638 \\ 113789 & 124399 & 123255 & 157050 & 189834 & 226750 & 235813 & 175878 & 297157 & 161166 & 193152 & 138061 \\ 117101 & 103744 & 124117 & 119236 & 250610 & 339734 & 177849 & 145774 & 368703 & 230218 & 282322 & 141812 \\ 27877 & 32822 & 23690 & 35847 & 12691 & 21950 & 25206 & 38075 & 19882 & 26595 & 26201 & 30740 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Ця матриця побудована на основі даних підприємства за останні 4 роки — з 2020 по 2023.

У подальшому створено дискретну систему керування залишками складів малого підприємства на 2024 рік (28)—(32), яка дозволить ефективно розподіляти наявні ресурси для формування запасів компанії в будь-який період 2024 року.

Діагональні елементи матриці B дорівнюють

$$b_1 = 1,025; \; b_2 = 1,035; \; b_3 = 1,03; \; b_4 = 1,045; \; b_5 = 1,055; \; b_6 = 1,03. \quad (40)$$

Вектор $s^0 = \begin{pmatrix} 344057 & 203161 & 199067 & 162640 & 254345 & 65552 \end{pmatrix}^T$ містить суми залишків товарів, розподілених по 6 групах на кінець 2023 року.

Послідовно розраховуємо значення вектора керувальних впливів на кожному кроці, починаючи з $k = 1$ (січень 2024 року). Розрахунки виконуємо за формулами (28)—(32), отримуючи для кожного кроку вектор вихідних сигналів системи. Всі необхідні дані беруться з програми обліку підприємства.

В результаті цих розрахунків отримаємо вектор керувальних впливів

$$u(3) = \begin{pmatrix} 133\,421 & 35\,085 & 0 & 63\,629 & 59\,687 & 13\,809 \end{pmatrix}^T, \quad (41)$$

та сформуємо вектор стану системи (залишки товару по групах) на початок квітня 2024 року

$$s(4) = \begin{pmatrix} 279344 & 111803 & 76128 & 190428 & 133879 & 39410 \end{pmatrix}^T. \quad (42)$$

Порівняння значень вектора стану (42) зі значеннями четвертого стовбця матриці (39) (прогнозні залишки на квітень 2024 року) дозволяють зробити висновок, що сформованих залишків цілком достатньо для отримання необхідного рівня продажів.

Висновки

Побудовано дискретну систему керування залишками товарів торговельного підприємства, в умовах, коли на систему діють зовнішні впливи. У цій системі, шляхом відстежування розміру реальних запасів товарів (виходу системи), вносяться корективи у вектор керувальних впливів. Більше того, в процесі побудови регулятора відслідковується загальна сума витрат, що є в наявності на підприємстві (вхід системи), яка ефективно розподіляється по компонентах регулятора.

Науковою новизною цього дослідження є створення спостерігача вектора стану повного порядку, який дозволяє оцінювати реальний стан системи та корегувати значення вектора керування, який будується за умови такого розподілу витрат по групах товарів, за якого будуть забезпечені прогнозні продажі у будь-який проміжок часу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Y. Wangand, and Xu Li. "Dynamics and Control on a Discrete Multi-Inventory System," *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2019, 2019. https://doi.org/10.1155/2019/6926342 .

[2] S. Antic, L. D., Milutinovic, and A. Lisec, "Dynamic Discrete Inventory Control Model with Deterministic and Stochastic Demand," in *Pharmaceutical Distribution*. *Applied Sciences*, № 12, 2022. https://doi.org/10.3390/app12031536 .

[3] М. Є. Юрченко, «Дискретна модель оптимального управління запасами підприємства,» *Ефективна економіка*, 2019. https://doi.org/ 10.32702/2307-2105-2019.3.32 .

[4] Ogata Katsuhiko, "Discrete-time Control Systems," *A Simon & Schuster Company Englewood Cliff*, New Jersey, 1995, 732 p.

[5] P. E. Moraal, and J. W. Grizzle, "Observerd esignfornon linear systems with discrete-time measurement," *IEEE Transactionson Automatic Control*, vol. 40(3), pp. 395-404, 1995. https://doi.org/10.1109/9.376051 .

Рекомендована кафедрою автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій .ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 4.07.2024

Савранська Алла Володимирівна — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри системного аналізу та обчислювальної математики, e-mail: savranskaya-alla@ukr.net ;

Шевчук Марк Валерійович — аспірант кафедри системного аналізу та обчислювальної математики, e-mail: shevchuk.marko@gmail.com .

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя

A. V. Savranska[1]
M. V. Shevchuk[1]

Construction of a State Vector Observer for a Discrete Inventory Management System

[1]National University Zaporizhzhia Polytechnic

All control objects are uncertain to one degree or another. Uncertainties significantly affect the performance of the control system and can lead to its loss. Therefore, for high-quality management of any object, it is necessary to know its state vector. This enables to organize management, which ensures the efficient operation of the system. This problem is solved by estimating the state vector of the system, which leads to the construction of observers.

Inventory management tasks are focused on maintaining a balance between avoiding product shortages and overall reduction of balances through their effective distribution between individual groups of goods or between enterprise divisions.

In this article, a discrete system for managing the company's product balances is built, which consists of the difference equation of the system state vector, the equation for estimating this state, and the control vector, which consists of costs aimed at replenishing the product balances. A sales forecast matrix is built in advance based on the company's historical data for several previous years

The objective of this study is to create a regulator for the balance management system, which takes into account the real state of the system for any period of time. For this purpose, a full-order state vector observer is built, which, monitoring the observed output of the system, correlates the vector of control influences and the value of the system state vector. The control vector is a vector of expenses necessary to form the number of balances by product groups at a level that allows you to reach the forecast sales volume.

The scientific novelty of the study consists in the creation of a control system with a state vector observer of full order, which allows to perform monitoring of the real state of the system and correcting the vector of control influences.

The results of this study were tested at a small wholesale enterprise, which allowed the manager to improve the efficiency of procurement planning.

Keywords: discrete control systems, state vector observers, inventory control, differential equations.

Savranska Alla V. **—** Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor with the Chair of System Analysis and Computational Mathematics, e-mail: savranskaya-alla@ukr.net ;

Shevchuk Mark V. **—** Post-Graduate Student with the Chair of System Analysis and Computational Mathematics, e-mail: shevchuk.marko@gmail.com