

С. В. Ковалевський¹
В. Я. Побережець²

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНТРОПІЙНИХ ОЦІНОК ДІАГНОСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ЙМОВІРНІСНИХ РОЗПОДІЛІВ

¹Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ—Тернопіль;

²Вінницький національний технічний університет

Здійснено поєднання теоретичних положень і практичних експериментів для обґрунтування універсального інформаційного підходу до діагностики технологічних систем. На початку дослідження автори звертаються до фундаментальних ідей ентропії Шеннона як міри невизначеності, пояснюючи її роль у кількісному оцінюванні інформаційної насиченості діагностичних сигналів. Головна ідея полягає в тому, що традиційні статистичні характеристики — математичне сподівання чи дисперсія — не завжди дозволяють вичерпно описати складні структурні зміни в матеріалах, особливо в умовах магніто-резонансної обробки. Саме тому розроблено підхід, який дає змогу порівнювати різні ймовірнісні моделі за єдиною інформаційною шкалою. Детально представлено методологію, яка передбачає побудову єдиного коректованого простору параметрів: всі розподіли вирівнюються за спільними характеристиками середнього значення та розсіювання, що забезпечує безпристрасне порівняння. На прикладі п'яти матеріалів — сталі, міді, дюралюмінію, текстоліту й органічного скла — проведено моделювання спектральних відгуків у відповідь на широкосмугове вібраційне збудження в постійному магнітному полі. Для кожного зразка отримано амплітудно-частотні характеристики, що дозволило виявити унікальні «спектральні відбитки» матеріалів. Висока упорядкованість сталевих відгуків, проявлена вираженим резонансним піком, протиставляється практично рівномірному спектру діелектриків, що свідчить про різні механізми взаємодії широкосмугових вібрацій і магнітного поля з матеріалом. Результати демонструють, що спектральна ентропія є чутливим індикатором структурних змін: зменшення її значення корелює зі зростанням впорядкованості матеріалу, а підвищена ентропія вказує на рівномірний розподіл енергії по частотах. На основі отриманих даних сформульовано практичні рекомендації щодо вибору оптимальних статистичних моделей для різних класів матеріалів: наприклад, для феромагнітних металів доцільно використовувати розподіли з більшою вагою важких «хвостів», тоді як для неметалевих матеріалів — моделі з максимальною інформаційною невизначеністю. Запропонований підхід відкриває нові перспективи для інформаційно-орієнтованої діагностики та неруйнівного контролю, сприяючи підвищенню надійності та ефективності технологічних процесів у машинобудуванні та матеріалознавстві.

Ключові слова: ентропія Шеннона, діагностика технологічних систем, статистичні розподіли, магніто-резонансна обробка, спектральна ентропія, інформаційна невизначеність.

Вступ

Сучасні методи діагностики технологічних систем дедалі більше потребують об'єктивних кількісних критеріїв, які дозволяли б чітко оцінювати інформативність різноманітних діагностичних моделей і методів. Традиційні статистичні підходи, які орієнтуються переважно на окремі параметри розподілів, такі як математичне сподівання, дисперсія чи медіана, часто не здатні забезпечити комплексну оцінку інформаційної цінності діагностичних даних. Водночас сьогодні спостерігається зростаюча потреба в надійніших і об'єктивніших критеріях, які дозволили б порівнювати різні статистичні моделі, що використовуються в діагностиці технічних систем. Сучасна практика показує, що базування лише на окремих статистичних параметрах не дає повної картини та не дозволяє вичерпно оцінити інформаційну насиченість діагностичних сигналів [1], [2], що дає поштовх до подальшого розвитку теоретичних і методологічних підходів, завдяки яким можна було б обґрун-

товано вибирати найефективніші статистичні моделі. Такі моделі повинні забезпечувати мінімальну інформаційну невизначеність під час діагностування різноманітних технологічних систем і матеріалів.

Останнім часом все більше уваги дослідники і практики приділяють розвитку інноваційних технологій обробки матеріалів, що передбачають комбінований вплив ширококугових вібраційних навантажень разом із потужними магнітними полями. Запровадження таких перспективних технологій потребує наявності відповідних адекватних діагностичних інструментів, здатних об'єктивно оцінити їхню ефективність та наслідки для матеріалів. До того ж гостро постає завдання розроблення та вдосконалення неруйнівних методів контролю, які здатні виявляти найменші структурні зміни в матеріалах на основі аналізу їхніх спектральних і статистичних характеристик. Ці методи відіграють важливу роль для забезпечення високої надійності й тривалості експлуатації вузлів і деталей машин.

Попри значний інтерес до цієї тематики, на сьогодні залишається невирішеним питання системного кількісного порівняння інформаційної цінності різних статистичних розподілів, які застосовуються для опису параметрів діагностики технічних систем. Зокрема, недостатньо уваги приділяється фізичній природі параметрів, що досліджуються, та специфіці діагностичних об'єктів [3]. Це й визначає актуальність проведення комплексних досліджень, спрямованих на створення універсальних критеріїв та методичних підходів, що могли б значно підвищити точність і об'єктивність діагностики у різних галузях технологій. У цьому контексті особливої уваги заслуговує ентропія Шеннона (ЕШ), яка виступає універсальною мірою невизначеності й дозволяє кількісно оцінювати інформаційну насиченість різноманітних діагностичних моделей. Особливий інтерес викликають магніто-резонансні процеси обробки матеріалів, що поєднують у собі вплив ширококугових вібраційних навантажень і потужних магнітних полів. Ці новітні процеси дозволяють суттєво змінювати фізико-механічні властивості матеріалів навіть без традиційної термообробки. Проте ефективність таких технологій безпосередньо залежить від розвитку адекватних інформаційно-статистичних методів діагностики, які здатні фіксувати й аналізувати тонкі структурні зміни в матеріалах. Саме використання ентропійного підходу для аналізу спектральних та статистичних характеристик сигналів відгуку може забезпечити прорив у розв'язанні цього важливого наукового та прикладного завдання.

Задачі дослідження, поставлені у цій роботі:

1. Теоретично обґрунтувати використання ЕШ як універсального кількісного критерію для оцінювання інформаційної невизначеності діагностичних моделей, які описують структурні зміни в матеріалах, зумовлені магніто-резонансними процесами їхньої обробки.
2. Розробити методику порівняльного аналізу інформаційної цінності різних статистичних розподілів (нормального, експоненційного, рівномірного, Вейбулла, гамма, логнормального та Пуассона) шляхом нормування їх за спільними параметрами математичного сподівання та дисперсії.
3. Дослідити специфіку магніто-резонансних процесів обробки матеріалів на основі моделювання відгуків п'яти різних матеріалів (сталі, міді, дюралюмінію, текстоліту та органічного скла) на ширококугове вібраційне збудження в постійному магнітному полі з використанням показника ЕШ.
4. Виявити та охарактеризувати спектрально-статистичні «відбитки» кожного з матеріалів, що дозволяють оптимально вибирати статистичні моделі для підвищення точності діагностики.
5. Встановити кореляційний взаємозв'язок між типом матеріалу (феромагнітний метал – сталь; немагнітні метали – мідь, дюралюміній; немагнітні неметалеві матеріали – текстоліт, органічне скло), їхніми спектральними параметрами (частота та амплітуда спектральних піків, характер спектрального розподілу) та значеннями ЕШ, що дозволяє ідентифікувати структурні особливості матеріалів за допомогою ентропійного підходу.
6. Сформулювати практичні рекомендації щодо оптимального вибору статистичних моделей у діагностиці матеріалів залежно від їх типу та структури (феромагнітні метали, немагнітні метали, немагнітні неметалеві матеріали).

Основна частина

Підходи, основані на інформаційній ентропії, мають глибоке коріння в класичних працях зі статистичної фізики та теорії ймовірностей [4], [5]. Ентропія Шеннона є фундаментальним кількісним показником, який дозволяє оцінювати рівень невизначеності інформації у процесах прийняття рішень. В контексті діагностики технологічних систем використання ентропії Шеннона дає

змогу об'єктивно оцінити ступінь інформаційної невизначеності щодо поточного стану об'єкта діагностування. Математично ентропія Шеннона визначається за формулою [6]

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i),$$

де $H(X)$ — ентропія випадкової величини X ; $p(x_i)$ — ймовірність i -го можливого стану діагностичної оцінки.

При цьому високі значення ентропії свідчать про значну інформаційну невизначеність стану діагностованої системи. Навпаки, низькі значення вказують на високу впевненість у правильності діагностичних рішень, що дозволяє підвищити ефективність і надійність діагностичних процедур.

Запропонований підхід, потенційно новий і актуальний, оскільки:

- зазвичай аналіз діагностичних оцінок обмежується порівнянням ймовірнісних характеристик, класичних статистичних критеріїв або експертних оцінок. Впровадження ЕШ дозволить кількісно оцінювати рівень інформаційної визначеності діагностичних висновків;
- можливість порівнювати різні закони розподілів (нормальний, експоненційний, Вейбулла, гамма-розподіл тощо) за єдиною метрикою інформаційної невизначеності;
- виявлення специфіки окремих розподілів щодо інформаційної насиченості дозволить обґрунтовано вибирати адекватні моделі діагностики.

Практичне значення дослідження полягає у:

- підвищенні якості діагностики шляхом визначення оптимальних моделей, які забезпечують найменшу інформаційну невизначеність;
- поліпшенні процесу прийняття рішень за рахунок кількісного вимірювання інформаційних втрат у діагностичних процедурах;
- розробці практичних рекомендацій для інженерів та операторів щодо обґрунтованого вибору діагностичних процедур у реальних технологічних процесах.

Нижче подано ЕШ для основних типів розподілів випадкових величин та проведено детальний аналіз їх особливостей, властивостей і впливу на точність діагностування технічних систем.

1. *Нормальний розподіл* має вигляд [7]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\text{ЕШ} \quad H(X) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma^2), \quad (1)$$

де μ — математичне сподівання; σ^2 — дисперсія.

Попередній аналіз:

- ентропія залежить лише від дисперсії, що свідчить про однакову інформаційну визначеність незалежно від центру розподілу;
- зі зростанням дисперсії зростає ентропія — це свідчить про більшу невизначеність;
- мінімальна ентропія нормального розподілу досягається за мінімальної дисперсії.

2. *Експоненціальний розподіл* має вигляд [8]

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0;$$

$$\text{ЕШ} \quad H = 1 - \log_2 \lambda. \quad (2)$$

Аналіз:

- ентропія експоненціального розподілу прямо пов'язана зі швидкістю настання події (λ);
- зі збільшенням λ (зменшення середнього значення) ентропія зменшується, що вказує на вищу визначеність діагностичних даних;
- цей розподіл доречний у діагностиці станів, які мають властивість «без пам'яті».

3. *Рівномірний розподіл* має вигляд [9]:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b];$$

$$\text{ЕШ} \quad H = \log_2(b - a). \quad (3)$$

Аналіз:

- ентропія рівномірного розподілу залежить виключно від ширини інтервалу;
- максимальна невизначеність — це основна властивість цього розподілу, що робить його найбільш «ентропійним» з усіх можливих розподілів за фіксованої ширини інтервалу;
- використовується, коли немає підстав виділяти будь-який стан як ймовірніший.

4. Розподіл Вейбулла має вигляд [10]

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k}, \quad x \geq 0, \quad k, \lambda > 0;$$

ЕШ: Аналітично складна, загальний вигляд виразу (через гамма-функцію Γ \Gammaamma Γ):

$$H = \frac{\gamma(1 - 1/k) + 1}{\ln 2} + \log_2 k\lambda, \quad (4)$$

де γ — стала Ейлера-Маскероні.

Аналіз:

- розподіл Вейбулла широко застосовується в діагностиці надійності деталей, які піддаються втомі, зносу або старінню;
- зміна форми (k) суттєво впливає на ентропію: зростання k зменшує ентропію, що свідчить про меншу невизначеність часу до відмови;
- параметр масштабу (λ) змінює ентропію, не впливаючи на її структуру.

5. Гамма-розподіл має вигляд [11]

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta \alpha \Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0;$$

$$\text{ЕШ} \quad H = \alpha + \log_2(\beta \Gamma(\alpha)) + (1 - \alpha) \psi(\alpha) / \ln 2, \quad (5)$$

де $\psi(\alpha)$ — діаграма-функція.

Аналіз:

- гамма-розподіл часто описує час очікування декількох незалежних подій. Він гнучкий за формою;
- зі зростанням форми (α) зменшується ентропія, а зі зростанням масштабу (β) ентропія збільшується;
- дозволяє ефективно описати невизначеність комплексних процесів у технічних системах.

6. Логнормальний розподіл має вигляд [12]

$$(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0;$$

$$\text{ЕШ} \quad H = \log_2(e^{\mu+0,5}\sigma\sqrt{2\pi}). \quad (6)$$

Аналіз:

- використовується для оцінювання часу життя деталей, коли процес старіння має мультиплікативний характер;
- ентропія залежить як від математичного сподівання логарифма величини, так і від дисперсії;
- збільшення дисперсії (неоднорідності) істотно підвищує невизначеність стану.

7. Розподіл Пуассона (дискретний розподіл) має вигляд [13]

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{ЕШ} \quad H = \lambda \left[1 - \frac{\log_2 \lambda}{\ln 2} \right] + e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \log_2 k!}{k!}. \quad (7)$$

Аналіз:

- характеризує число подій, що відбуваються у фіксованому інтервалі;
- ентропія зростає з ростом середнього числа подій λ , збільшуючи невизначеність;
- використовується для дискретних діагностичних параметрів (число відмов, дефектів тощо).

Наведений аналіз демонструє, що вибір закону розподілу суттєво впливає на рівень інформаційної невизначеності діагностичних оцінок. Використання ЕШ дозволяє кількісно порівнювати ефективність різних моделей діагностики та вибирати найадекватніші моделі для конкретних завдань. Запропонований аналіз відкриває нові можливості для інформаційно-орієнтованого діагностування та підвищення точності управлінських рішень у машинобудуванні й технологіях. Для виконання порівняльного аналізу ЕШ для всіх зазначених розподілів вибрано єдиний підхід, доцільний для всіх випадків. Оскільки розглянуті різні розподіли, що характеризують як безперервні, так і дискретні діагностичні параметри, важливо вибрати універсальний діагностичний показник, який можна інтерпретувати як «час до настання певної діагностичної події» (наприклад, досягнення критичного стану або відмови). Такий вибір пояснюється тим, що: більшість згаданих розподілів (нормальний, експоненціальний, Вейбулла, гамма, логнормальний) традиційно використовуються для опису часових параметрів надійності; дискретний розподіл Пуассона можна використати, якщо час розбити на дискретні інтервали та розглядати число подій (відмов, дефектів) за певні рівні проміжки часу; рівномірний розподіл може бути використаний як еталон для максимального рівня невизначеності. Умови для єдиного порівняння сформовані так, що: задано однакове математичне сподівання для всіх розподілів ($E[X] = 10$ одиниць часу); зафіксовано дисперсію ($Var[X] = 4$, де це можливо), для коректного порівняння розподілів за одним рівнем невизначеності; для дискретного випадку Пуассона вибрати параметр λ , що дорівнює середньому числу подій за заданий проміжок часу ($\lambda = 10$).

Порівняння ентропій виконано за таким алгоритмом:

1. Для кожного закону розподілу визначені параметри, що відповідають вибраним математичним сподіванням та дисперсії.
2. Розраховано ЕШ для кожного розподілу.
3. Використовуємо отримані значення ентропій для порівняння ступеня інформаційної невизначеності.

Результати проведених розрахунків подані у табл. 1.

Таблиця 1

Параметри статистичних розподілів та відповідні значення ентропії Шеннона для фіксованого математичного сподівання та дисперсії

Розподіл	Параметри (для $E = 10, Var = 4$)	Ентропія (ЕШ)	
Нормальний	$\mu = 10, \sigma^2 = 4$	$H(X) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma^2)$	3,060
Експоненціальний	$\lambda = \frac{1}{10}$ (але $Var = 100$, тому тільки $E = 10$)	$H = 1 - \log_2 \lambda$	4,754
Рівномірний	$a = 6,536, b = 13,464$ (ширина $b - a = 6,928$)	$H = \log_2(b - a)$	2,788
Вейбулла	чисельно визначити k, λ , що задовольняють E, Var	чисельно, через гамма-функцію	4,351
Гамма	$\alpha = \frac{E^2}{Var} = 25, \beta = \frac{Var}{E} = 0,4$	чисельно, через дигамму	3,038
Логнормальний	чисельно визначити μ, σ^2 за E, Var	чисельно	2,990
Пуассона (дискретний)	$\lambda = 10$	чисельно	2,861

Загальні рекомендації щодо використання:

1. Експоненціальний розподіл має найвищу ентропію, що свідчить про велику інформаційну невизначеність. Це пояснюється його сильною асиметричністю і великою дисперсією при заданому середньому значенні. Рекомендовано використовувати для опису процесів із сильною випадковістю і асиметрією (наприклад, випадковий вихід з ладу, аварійні ситуації).

2. Розподіл Вейбулла також має досить високу ентропію, але нижчу, ніж експоненціальний. Цей розподіл підходить для аналізу процесів зі змінною інтенсивністю відмов. Рекомендується

для оцінювання процесів старіння або зносу, особливо за змінної швидкості деградації.

3. Нормальний та гамма-розподіли мають близькі значення ентропії, що свідчить про середню інформаційну визначеність. Це є оптимальним балансом між простотою моделі і адекватністю для більшості реальних технічних систем.

4. Нормальний розподіл є оптимальним для аналізу загальних технічних задач, де домінує багато незалежних факторів, що формують сукупний вплив.

5. Гамма-розподіл: рекомендується використовувати у випадках, коли процес складається з декількох етапів, кожен з яких має експоненційний характер.

6. Рівномірний розподіл має найнижчу ентропію, що здається неочікуваним, але пояснюється обмеженістю діапазону значень, що зменшує інформаційну невизначеність в порівнянні з іншими, менш обмеженими розподілами. Рекомендується як еталонний розподіл максимальної невизначеності у визначених межах (наприклад, початкове припущення при повній відсутності інформації про процес).

Таким чином, використання показника ЕШ як метрики порівняння може бути доцільним для теоретичного та практичного обґрунтування вибору моделей у діагностиці технологічних систем відносно різних технічних систем

Діагностика магніто-резонансних процесів обробки матеріалів за показниками ЕШ

Комбіноване навантаження матеріалів широкосмуговими вібраціями (білим шумом) у присутності сильного магнітного поля здатне підвищувати твердість і зносостійкість без додаткової термообробки [14]—[16]. Для аналізу цього явища змодельовано віртуальний датасет сигналів відгуку різних матеріалів: сталь, мідь, дюралюміній, текстоліт та органічне скло, — на контрольований білий шум у постійному магнітному полі. Метою є отримання амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) цих матеріалів та розрахунків статистичних параметрів сигналів (середнє, дисперсія, спектральний пік, ентропія спектра) з подальшим аналізом розподілів. Такий підхід дозволяє виявити «інформаційний почерк» кожного матеріалу та надати рекомендації щодо використання спектрально-статистичних ознак у діагностиці їхнього стану.

Методика моделювання. Для кожного матеріалу згенеровано реалізацію білого шуму (часовий ряд з 10000 точок, $x(t)$) як вхідний вплив та сформовано вихідний сигнал $y(t)$, що імітує реакцію матеріалу. Білий шум має плоский спектр (рівні амплітуди у широкому діапазоні частот), тому АЧХ матеріалу безпосередньо визначає спектр відгуку. АЧХ — це залежність амплітуди гармонічних коливань на виході від частоти за сталого рівня входу. В моделі кожен матеріал представлено лінійною системою з певною резонансною частотою та добротністю. Наприклад, для сталі задано вузький резонанс на частоті ~ 30 Гц, для міді — слабший пік близько 80 Гц, для дюралюмінію — ширший пік ~ 150 Гц; діелектрики (текстоліт, оргскло) припущено практично безрезонансні (плоска АЧХ). З урахуванням магнітних властивостей, у сигнал сталі додатково внесено нелінійні імпульсні викиди (аналогічні шуму Баркгаузена) — випадкові стрибки магнітної проникності, що генерують поодинокі сплески. Ці нелінійні ефекти викликають відхилення розподілу сигналу від нормального. Для решти матеріалів система вважається лінійною, тому на виході за гауссівського білого шуму отримуємо також гауссівські випадкові процеси. Вихідні сигнали кожного матеріалу мають нульове середнє (коливання відносно нуля) і характерні відмінності у дисперсії та спектральному складі.

Далі для кожного сигналу визначено дискретне перетворення Фур'є та отримано амплітудний спектр $Y(f)$. За спектром визначено амплітудно-частотні характеристики матеріалів (оскільки вхід рівномірний по частотах, спектр виходу відображає саме частотний відгук системи). Також розраховано статистичні показники: середнє m , дисперсія σ^2 , пік спектра (максимальна амплітуда та відповідна їй частота), а також ентропія спектра за Шенноном. Спектральна ентропія визначається як інформаційна ентропія нормалізованого розподілу потужності сигналу в частотній області. Іншими словами, вона кількісно оцінює, наскільки рівномірно енергія сигналу розподілена між частотами. Нарешті, сформовано вибірки значень $y(t)$ для кожного матеріалу та побудовано гістограми розподілу, щоб емпірично перевірити закон розподілу. Гауссівська (нормальна) форма розподілу очікується для лінійних матеріалів, тоді як наявність імпульсних перешкод (нелінійностей) може проявитися у «важких хвостах» розподілу (відхилення від нормального закону).

Отримані амплітудно-частотні характеристики всіх п'яти матеріалів доводять, що сталь (феромагнітний матеріал) має різко виражений резонансний пік ~ 30 Гц — амплітуда відгуку на цій частоті значно перевищує рівень на інших частотах. Мідь показує помірний пік близько $\sim 75 \dots 80$ Гц, значно слабший за сталевий. Дюралюміній (алюмінієвий сплав) характеризується ширшим підвищенням амплітуди, близько ~ 150 Гц. Для діелектриків (текстоліту та оргскла) спектр відгуку залишається близьким до білого шуму (майже рівномірного): помітних різких піків немає, лише незначні коливання амплітуди (у моделях задано ледь виражені широкі підйоми близько $200 \dots 300$ Гц). Таким чином, метали мають *резонансні смуги* на відміну від немагнітних матеріалів, які пропускають усі частоти більш-менш рівномірно. Це пояснюється тим, що в металах реалізуються механічні або магнітні резонанси: наприклад, у сталі магнітне поле збуджує домени, що призводить до колективних коливань на характерній частоті; у міді та дюралюмінії можливі коливання, пов'язані з вихровими струмами або пружними резонансами. Натомість текстоліт та оргскло не мають шляхів для магнітної взаємодії, відгукуючись лише як пасивні елементи з майже плоскою частотною характеристикою.

Параметри вихідних сигналів для кожного матеріалу подано в табл. 2.

Таблиця 2

Розраховані оцінки статистичних параметрів сигналів спектрів відгуку зразків на збудження «білим шумом»

Матеріал	Середнє	Дисперсія	Частота піку, Гц	Амплітуда піку	Ентропія спектра (біт)
Сталь	0,0015	0,2063	27,4	644,2	8,91
Мідь	-0,00045	0,1000	75,3	238,1	10,51
Дюралюміній	-0,00179	0,1000	153,4	191,4	10,94
Текстоліт	0,00150	0,0500	215,5	65,7	11,66
Органічне скло	-0,00255	0,0500	318,8	80,1	11,60

Середні значення близькі до нуля (коливання відгуку симетричні відносно 0). Дисперсія (сила шуму) помітно відрізняється: найбільша у сталі ($\sim 0,206$), найменша — у діелектриків ($\sim 0,05$ у текстоліту й оргскла), проміжні значення $\sim 0,10$ у міді та дюралюмінію. Це відображає інтенсивність сигналу: сталь генерує сильніший відгук (через магніто-механічні збурення), тоді як немагнітні матеріали майже не додають власних коливань (їх вихід — в основному слабкий фоновий шум). Пік спектра кількісно характеризує резонанс: у сталі максимальна амплітуда спектра ~ 644 (умовн. од.) на низькій частоті $27 \dots 30$ Гц; у міді пік ~ 238 на ~ 75 Гц; у дюралюмінію ~ 191 на ~ 153 Гц. У текстоліту й оргскла найбільша гармоніка значно менша за амплітудою ($\approx 65 \dots 80$) і відповідає випадковим коливанням (широкому діапазону частот без чіткого резонансу).

Така «спектральна концентрація» енергії відбивається і в показнику ентропії спектра. Сталь має найменшу ентропію, що означає дуже невелику невизначеність розподілу енергії за частотами — більша частка енергії зосереджена в одному вузькому діапазоні (близько 30 Гц). Натомість текстоліт і оргскло мають близьку до максимальної ентропії для цього діапазону частот. Високе значення ентропії означає, що енергія спектра розподілена майже рівномірно по багатьох частотах (тобто відгук не містить виділених гармонік). Мідь і дюралюміній посідають проміжне положення, що узгоджується з наявністю помірних резонансів. Зауважимо, що тут ентропія обчислена за формулою Шеннона на основі нормалізованого спектра сигналу, і вимірюється в бітах інформації. Таким чином, ентропія спектра виступає мірою «впорядкованості» частотної картини: для сталі низька ентропія свідчить про високу впорядкованість, тобто домінування кількох визначених частот; для діелектриків висока ентропія вказує на невпорядкований, рівномірно розподілений спектр. Цей показник тісно пов'язаний зі структурними змінами матеріалу — відомо, що зі зміцненням (зростанням впорядкованості доменів, дислокацій тощо) ентропія сигналу знижується. Отже, спектральна ентропія може слугувати інформативним діагностичним параметром.

Аналіз розподілів сигналів. Для оцінки законів розподілу ймовірностей побудовано гістограми амплітуд сигналів. Як і очікувалося, для більшості матеріалів розподіл відгуку є близьким до нормального: у міді, дюралюмінію, текстоліті й оргсклі емпіричні гістограми практично збігаються з гауссовою кривою. Це підтверджує, що їхні сигнали можна вважати фільтрованим білим шумом без значних нелінійних дефектів, тож згідно з теорією лінійних систем результат лишається гауссівським. У сталі ж спостерігається відхилення: центр розподілу дещо вужчий і вищий за нормальний, а у «важких хвостах» наявна незначна додаткова ймовірність. Хоча основна маса значень

сталі теж підпорядковується нормальному закону (зумовленому лінійною резонансною частиною відгуку), рідкісні великі сплески генерують «важкі хвости» — поодинокі виходи за межі σ , що нехарактерно для чисто гауссівського шуму. Ці хвости на гістограмі сталі ледь помітні (ймовірність таких відхилень $< 0,1\%$), але вони вказують на наявність імпульсних подій (перемагнічування). Таким чином, розподіл сталі ближчий до суміші гауссівського процесу з рідкими імпульсами. Для практичної діагностики це означає, що сталь може бути ідентифікована не лише спектрально, а й статистично. Інші матеріали не демонструють значно вищих моментів розподілу і залишаються в рамках нормального закону, що спрощує їх статистичний опис.

Моделювання показало, що різні матеріали мають чітко відмінні спектрально-статистичні «відбитки». Феромагнітна сталь акумулює енергію відгуку на низьких частотах, генеруючи вузькосмуговий спектр з малою ентропією та імпульсними аномаліями у часовому сигналі. Немагнітні метали (мідь, дюралюміній) проявляють рівномірніший спектр з помірними резонансами і середнім рівнем ентропії. Діелектрики (текстоліт, оргскло) фактично не вносять власних спектральних особливостей — їхній відгук близький до білого шуму з максимальною ентропією. З погляду діагностики, це означає, що спектральні характеристики (частота та величина піку) можна використати для ідентифікації матеріалу або контролю його стану. Приміром, виявлення різкого піку на ~ 30 Гц і низької спектральної ентропії однозначно вказує на сталь та свідчить про впорядкованість її внутрішньої структури. Навпаки, плоский спектр з високою ентропією буде характерний для немагнітних полімерів (органічне скло, текстоліт). Статистичні показники також доповнюють діагностику: відхилення розподілу сигналу від нормального (наявність «важких хвостів», підвищений ексцес) служить індикатором нелінійних процесів (наприклад, магнітоакустичних емісій у сталі). У практичній системі моніторингу пропонується враховувати обидва типи ознак. По-перше, вимірювати спектральну ентропію як інформативний індекс — її зменшення буде сигналізувати про появу домінуючих резонансів та підвищення впорядкованості матеріалу. По-друге, аналізувати резонансні частоти та амплітуди: кожен матеріал має свій характерний «спектральний почерк», що може лягти в основу алгоритму розпізнавання (наприклад, спектрального класифікатора). По-третє, доцільно контролювати форму розподілу сигналу (через статистичні тести на нормальність) — значні відхилення можуть вказувати на аномальні процеси в матеріалі (тріщиноутворення, фазові перетворення тощо), особливо для магнітних матеріалів. Застосування запропонованої моделі діагностики дозволить безконтактно оцінювати стан і властивості матеріалів за параметрами їхнього магнітно-резонансного відгуку, що має перспективу для систем неруйнівного контролю та оперативної технічної діагностики.

Узагальнений висновок щодо діагностичного використання, поданий в табл. 3.

Таблиця 3

Рекомендації щодо інформативності статистичних розподілів залежно від типу матеріалу

Тип матеріалу зразків	Інформативні розподіли	Неінформативні розподіли
Сталь (феромагнітна)	Вейбулла, гамма, нормальний	рівномірний, експоненційний
Немагнітні металеві	нормальний, рівномірний	експоненційний, Вейбулла, гамма
Немагнітні неметалеві	рівномірний, нормальний	експоненційний, Вейбулла, гамма

Зазначені результати дозволяють чітко визначити оптимальні статистичні моделі для кожного класу матеріалів, що істотно підвищує точність і надійність їхньої спектральної діагностики.

Висновки

1. На основі проведеного дослідження встановлено, що ентропія Шеннона є ефективним універсальним критерієм для кількісного оцінювання інформаційної невизначеності у разі діагностування технологічних систем. Це дозволяє об'єктивно порівнювати різні статистичні моделі за єдиною метрикою та обґрунтовано вибирати найадекватніші з них для конкретних завдань діагностики.

2. Проведений порівняльний аналіз ентропії різних типів розподілів ймовірностей за умов нормування за математичним сподіванням і дисперсією показав такі значення інформаційної невизначеності:

- експоненційний розподіл — 4,754 біт (найвища невизначеність);
- розподіл Вейбулла — 4,351 біт (висока невизначеність);
- нормальний розподіл — 3,060 біт (середня невизначеність);
- гамма-розподіл — 3,038 біт (середня невизначеність);

- рівномірний розподіл — 2,788 біт (нижча невизначеність);
 - розподіл Пуассона — 2,861 біт (нижча невизначеність).
3. Розроблена методика об'єктивного порівняння інформаційної цінності статистичних моделей дозволила сформулювати рекомендації щодо вибору оптимальних розподілів:
- експоненційний розподіл рекомендовано для опису процесів з сильною випадковістю та асиметрією;
 - розподіл Вейбулла — для аналізу процесів зі змінною інтенсивністю відмов;
 - нормальний і гамма-розподіли — як оптимальний баланс між простотою моделі та адекватністю для більшості реальних технічних систем.
4. Дослідження спектральних відгуків різних матеріалів на широкопasmові вібраційне збудження в постійному магнітному полі виявило характерні спектрально-статистичні «відбитки»:
- феромагнітна сталь: вузькосmовий спектр з низькою ентропією (8,91 біт) та нелінійними імпульсними аномаліями;
 - немагнітні метали (мідь, дюралюміній): помірно резонансний спектр з середньою ентропією (10,51...10,94 біт);
 - діелектрики (текстоліт, оргскло): практично рівномірний спектр з максимальною ентропією (11,60...11,66 біт).
5. Встановлено, що для діагностики:
- феромагнітних матеріалів найінформативнішими є розподіли Вейбулла, гамма та нормальний;
 - немагнітних металевих матеріалів — нормальний та рівномірний;
 - немагнітних неметалевих матеріалів — рівномірний та нормальний розподіли.
6. Показано, що спектральна ентропія служить чутливим індикатором структурних змін у матеріалах: зі зростанням впорядкованості (приміром, магнітних доменів у сталі) ентропія спектра зменшується, відображаючи концентрацію енергії на резонансних частотах.
7. Запропонований підхід на основі аналізу ентропії Шеннона відкриває нові можливості для розробки інформаційно-орієнтованих методів неруйнівного контролю та діагностики, особливо у разі комбінованого впливу широкопasmових вібрацій і сильних магнітних полів. Комплексне використання спектральних характеристик, спектральної ентропії та аналізу форми розподілу сигналу дозволяє створити ефективну систему моніторингу та ідентифікації матеріалів з високим потенціалом для застосування в технічній діагностиці та неруйнівному контролі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Y. Xu, S. Kohtz, J. Boakye, P. Gardoni, and P. Wang, "Physics-informed machine learning for reliability and systems safety applications," *State of the art and challenges. Reliability Engineering & System Safety*, vol. 230, 2023. Art. 108900. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.108900>.
- [2] Ferial ElRobrini, Syed Muhammad Salman Bukhari, Muhammad Hamza Zafar, Nedaa Al-Tawalbeh, Naureen Akhtar, and Filippo Sanfilippo, "Federated learning and non-federated learning based power forecasting of photovoltaic/wind power energy systems," *A systematic review. Energy and AI*, vol. 18, 2024. Article 100438. ISSN 2666-5468. <https://doi.org/10.1016/j.egyai.2024.100438>.
- [3] Chen Zheyi, et al., "Evolution and Prospects of Foundation Models: From Large Language Models to Large Multimodal Models," *Computers, Materials and Continua*, vol. 80, Iss. 2. pp. 1753-1808, 2024. ISSN 1546-2218. <https://doi.org/10.32604/cmc.2024.052618>.
- [4] С. І. Перевозніков, Н. О. Біліченко, і В. С. Озеранський, *Теорія інформації та кодування*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2017, 82 с.
- [5] В. П. Майданюк, О. Н. Романюк, і С. Є. Тужанський, *Основи теорії інформації та кодування*, електр. навч. посіб. комбінованого використання. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2022, 133 с.
- [6] D. C. Christie, "Efficient estimation of directional wave buoy spectra using a reformulated Maximum Shannon Entropy Method: Analysis and comparisons for coastal wave datasets," *Applied Ocean Research*, vol. 142, 2024. Article 103830. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2023.103830>. ISSN 0141-1187.
- [7] W. Salkeld, "Small ball probabilities, metric entropy and Gaussian rough paths," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 506, Iss. 2, 2022. Article 125697. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125697>.
- [8] E. Suhir, "Double-exponential-probability-distribution-function and it's applications in some critical aerospace safety problems," *Perspective and brief review. Microelectronics Reliability*, vol. 159, 2024. Article 115439. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2024.115439>.
- [9] N. A. Spencer, and J. W. Miller, "Strong uniform laws of large numbers for bootstrap means and other randomly weighted sums," *Statistics & Probability Letters*, vol. 211, 2024. Article 110144. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2024.110144>.
- [10] M. Kreer, A. Kizilersu, and A. W. Thomas "When is the discrete Weibull distribution infinitely divisible?" *Statistics & Probability Letters*, vol. 215, 2024. Art. 110238. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2024.110238>.
- [11] P. J. Forrester, "On the gamma difference distribution," *Statistics & Probability Letters*, vol. 211. 2024. Art. 110136. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2024.110136>.
- [12] R. Tomaschitz, "Multiply broken power-law densities as survival functions: An alternative to Pareto and lognor-

mal fits,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 541. 2020. Article 123188. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123188>.

[13] J. Krotz, M. R. Sweeney, C. W. Gable, J. D. Hyman, and J. M. Restrepo, “Variable resolution Poisson-disk sampling for meshing discrete fracture networks,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 407, 2022. Article 114094. ISSN 0377-0427. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114094>.

[14] С. В. Ковалевський, О. С. Ковалевська, і Ю. В. Луца, «Підвищення експлуатаційних характеристик деталей машин на основі комбінованого впливу сильних магнітних полів», *Зб. наук. праць Дніпровського державного технічного університету. Технічні науки*, вип. 2, с. 29-36, 2021.

[15] S. Kovalevskyy, and O. Kovalevska, “New opportunities for processing materials in a strong magnetic fields,” *Технічні науки та технології*, науковий журнал, Національний університет «Чернігівська політехніка», № 4 (26), с. 7-14, 2021.

[16] S. Kovalevskyy, and O. Kovalevska, “Identification and Technological Impact of Broadband Vibration on the Object,” *Papers from the 3rd Grabchenko’s International Conference on Advanced Manufacturing Processes (InterPartner-2021)*, September 7-10, 2021, Odessa, Ukraine. ABCM Series on Mechanical Sciences and Engineering. Lecture Notes in Networks and Systems, pp. 78-87. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_8.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 8.05.2025

Ковалевський Сергій Вадимович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інноваційних технологій і управління, e-mail: kovalevskii61@gmail.com.

Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ—Тернопіль;

Побережець Владислав Ярославович — студент факультету машинобудування та транспорту, e-mail: vladpoberezhets@gmail.com.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

S. V. Kovalevskyy¹
V. Ya. Poberezhets²

Research of Entropy Estimates of Diagnostic Characteristics of Technological Systems Based on Probability Distributions

¹Donbass State Engineering Academy;

²Vinnitsia National Technical University

In the study, a combination of theoretical fundamentals and practical experiments is carried out to substantiate a universal information-based approach to the diagnosis of technological systems. At the outset of the study, the authors invoke the fundamental concepts of Shannon entropy as a measure of uncertainty, explaining its role in the quantitative assessment of the informational richness of diagnostic signals. The central premise is that traditional statistical metrics — such as the mean or variance — do not always allow for a comprehensive description of complex structural changes in materials, especially under conditions of magneto-resonant processing. It is for this reason that an approach was developed enabling the comparison of different probabilistic models on a single informational scale. The methodology is presented in detail, involving the construction of a unified, normalized parameter space: all distributions are aligned according to common characteristics of mean value and dispersion, ensuring an impartial comparison. Using five materials — steel, copper, duralumin, textolite, and acrylic glass — as examples, the authors model spectral responses to broadband vibrational excitation in a constant magnetic field. For each sample, amplitude-frequency characteristics are obtained, which make it possible to identify the unique “spectral fingerprints” of the materials. The high degree of order in the steel response, manifested by a pronounced resonance peak, contrasts with the nearly uniform spectrum of the dielectrics, indicating different interaction mechanisms between broadband vibrations and the magnetic field in these materials. The results demonstrate that spectral entropy is a sensitive indicator of structural changes: a decrease in its value correlates with an increase in material ordering, whereas an elevated entropy indicates an even distribution of energy across frequencies. Based on these findings, practical recommendations are formulated for selecting optimal statistical models for different classes of materials: for example, for ferromagnetic metals it is advisable to use distributions with heavier tails, while for non-metallic materials models with maximal informational uncertainty are preferred. The proposed approach opens new prospects for information-oriented diagnostics and non-destructive testing, contributing to enhanced reliability and efficiency of technological processes in mechanical engineering and materials science.

Keywords: Shannon entropy, diagnostics of technological systems, statistical distributions, magneto-resonance processing, spectral entropy, informational uncertainty.

Kovalevskyy Sergiy V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Innovative Technologies and Management, e-mail: kovalevskii61@gmail.com;

Poberezhets Vladyslav Ya. — Student of the Department of Mechanical Engineering and Transport, e-mail: vladpoberezhets@gmail.com