

УДК 531.31:621.86

**Б. І. Мокін<sup>1</sup>**  
**О. Б. Мокін<sup>1</sup>**  
**Б. В. Пасєка<sup>1</sup>**

## **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОМОБІЛЯ З АСИНХРОННИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ЗА НАЯВНОСТІ НА ДОРОЗІ СПУСКІВ, ПІДЙОМІВ І НАСЕЛЕНОГО ПУНКТУ ТА ЗУПИНКОЮ У ЦЬОМУ ПУНКТІ**

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

*В роботі [2] розв'язана задача синтезу математичних моделей оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом горизонтальним відрізком дороги за критерієм мінімуму витрат заряду силової акумуляторної батареї, але лише за умови, що електромобіль повинен проїхати від старту до фінішу за визначений термін часу та з врахуванням обмежень, обумовлених динамікою електромобіля та наявністю на цьому відрізку дороги населеного пункту, в якому правилами дорожнього руху обмежується швидкість. В цій роботі показано, що рух електромобіля через населений пункт з позицій його оптимізації суттєво відрізняється, якщо в населеному пункті дорога має спуски і підйоми, і доведено, що алгоритм синтезу моделей оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом, який враховує у функції Лагранжа лише обмеження на швидкість в населеному пункті, обмеження на подолання певної відстані за заданий час та обмеження, що обумовлені динамікою електромобіля, не дозволяє синтезувати моделі оптимального руху цього електромобіля, якщо у цьому населеному пункті дорога має спуски і підйоми. Показано, якого вигляду набуває функція Лагранжа у випадку, коли в задачі синтезу моделей оптимального руху електромобіля необхідно враховувати не лише появу населеного пункту на його дорозі, але і появу спусків та підйомів дороги у цьому населеному пункті. Синтезовано математичні моделі оптимального руху електромобіля за критерієм мінімуму витрат заряду силової акумуляторної батареї із зупинкою в межах населеного пункту і з початком його руху як в межах цього ж населеного пункту, так і поза його межами. Синтезовані математичні моделі після їх ідентифікації можуть бути використані в програмах навчання штучного інтелекту з цільовим призначенням для керування електричними транспортними засобами з асинхронним електроприводом.*

**Ключові слова:** електромобіль, асинхронний електропривод, дорога через населений пункт зі спусками та підйомами, моделі оптимального руху, критерій мінімуму витрат заряду силової акумуляторної батареї, обмеження динамікою, відстанню та дорожніми знаками.

### **Вихідні передумови і постановка задачі**

В наших роботах, узагальнених в монографії [1], розв'язана задача синтезу математичних моделей оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом як горизонтальним відрізком дороги, так і за наявності спусків, підйомів і поворотів, але за умов, що електромобіль має проїхати від одного пункту до іншого за визначений термін часу з мінімальними витратами заряду акумуляторної батареї.

Як показано в цих роботах, визначення траєкторій оптимального руху електромобіля у вигляді залежності від відносного часу  $\tau$ , відносного струму силової акумуляторної батареї  $i(\tau)$  та відносної швидкості руху  $v(\tau)$ , здійснюється шляхом мінімізації критерію відносних витрат енергії  $e_k$  акумуляторної батареї

$$e_k = \int_0^{\tau_k} (1 - \alpha i) i d\tau; \quad (1)$$

в умовах дії обмежень, лише динамікою електромобіля, визначеною рівнянням

$$\frac{dv}{d\tau} = \ln\left(i + \sqrt{i^2 + 1}\right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*^2} s_* - f_0 - f_1 v - f_2 v^2 \quad (2)$$

під час руху горизонтальним відрізком дороги;

$$\text{рівнянням} \quad \frac{dv}{d\tau} = \ln\left(i + \sqrt{i^2 + 1}\right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*^2} s_* + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2 \quad (3)$$

під час руху на спуск;

$$\text{рівнянням} \quad \frac{dv}{d\tau} = \ln\left(i + \sqrt{i^2 + 1}\right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*^2} s_* - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2 \quad (4)$$

під час руху на підйом, та необхідності подолання відносної відстані  $l_k$  за відносний час  $\tau_k$ , зв'язаної з відсною швидкістю  $v(\tau)$  функціоналом

$$l_k = \int_0^{\tau_k} v d\tau. \quad (5)$$

Нагадаємо, що, як і у наших роботах [1], [2], у виразах (1)—(5)

$$\mu = \frac{M_T}{M_H} = \frac{FR}{F_H R} = \frac{F}{F_H}; \quad v = \frac{V}{V_H}; \quad \tau = \frac{t}{T_M}; \quad i = \frac{I}{I_H}; \quad e_i = \frac{E_I}{E_H^I} = \frac{E_I}{U_B I_H T_M}; \quad \tau_k = \frac{T_k}{T_M}; \quad (6)$$

$$f_0^* = \frac{F_G T_M}{m V_H}; \quad f_0 = \frac{k_0 F_G T_M}{m V_H}; \quad f_1 = \frac{k_1 T_M}{m}; \quad f_2 = \frac{k_2 V_H T_M}{m}; \quad \alpha = \frac{r_B I_H}{U_B}; \quad l_k = \frac{L}{V_H T_M}, \quad (7)$$

де  $F, F_H$  — сила тяги і її номінальне значення;  $M, M_H$  — момент на валу тягового асинхронного електродвигуна та його номінальне значення, яке зв'язане з номінальним значенням сили тяги співвідношенням

$$F_H = \frac{M_H}{R}, \quad (8)$$

де  $R$  — радіус колеса;  $V, V_H$  — швидкість руху електромобіля та її номінальне значення;  $I, I_H$  — струм силової акумуляторної батареї та його номінальне значення;  $U_B$  — напруга акумуляторної батареї при її повному заряді;  $T_M$  — електромеханічна стала, для якої є справедливим базове співвідношення

$$T_M = \frac{m V_H}{F_H}, \quad (9)$$

де  $m$  — маса електромобіля;  $L, L_H$  — відстань та базове співвідношення для неї у вигляді

$$L_H = V_H T_M; \quad (10)$$

$E, E_H^I$  — енергія постійного струму акумуляторної батареї та базове співвідношення для неї у вигляді

$$E_H^I = U_B I_H T_M, \quad (11)$$

в якому  $F_G$  — вага електромобіля;  $T_k$  — час в дорозі від старту до зупинки;  $s, s_H$  — ковзання ротора та його значення за номінальної кутової швидкості  $\omega_H$  обертання валу ротора асинхронно-

го електродвигуна, якими задається відносне ковзання у вигляді

$$s_* = \frac{s}{s_H}, \quad (12)$$

$k_0$  — табличний коефіцієнт, який залежить від матеріалу поверхні дороги;  $k_1$  — коефіцієнт, що залежить від площі бічної поверхні електромобіля;  $k_2$  — коефіцієнт, що залежить від площі поперечного перерізу електромобіля;  $\beta$  — кут нахилу дорожнього полотна;  $r_B$  — внутрішній активний опір акумуляторної батареї; а параметри мають вигляд

$$a = \frac{1}{s_H}; \quad b = \frac{x_p}{r_p}, \quad (13)$$

де  $r_p, x_p$  — активний та реактивний опори обмотки ротора.

Але під час подолання електромобілем відстані від стартового пункту до кінцевого на цьому відрізку дороги можуть зустрітись населені пункти, в яких правила дорожнього руху обмежують швидкість електромобіля до рівня  $v_{01}$ , та дорожні знаки, що також обмежують його швидкість до рівня  $v_{02}$ .

Тож, як уже зазначено в тезах до доповіді, що лягла в основу цієї статті, актуальною задачею є синтез математичних моделей оптимального руху електромобіля шляхом мінімізації функціоналу (1), але з використанням не лише обмежень (2)—(4), а й обмежень, встановлених правилами дорожнього руху для проїзду населеними пунктами та встановлених дорожніми знаками за межами населених пунктів.

В нашій роботі [2] ця задача розв'язана для оптимального руху електромобіля горизонтальним відрізком дороги для двох випадків: коли електромобіль і починає і закінчує рух в межах населеного пункту та коли він закінчує рух в межах населеного пункту, але починає його за межами цього населеного пункту.

А у цій роботі, короткі тези якої опубліковані в роботі [3], пропонується розв'язання цієї задачі ще й за наявності на дорозі спусків та підйомів.

### Розв'язання поставленої задачі

Як і в роботах [1], [2], для розв'язання поставленої задачі будемо використовувати метод невідзначених множників Лагранжа.

Отже, як уже зазначено, в роботі [1] показано, що оптимальні траєкторії руху електромобіля у вигляді залежностей від відносного часу  $\tau$  відносного струму силової акумуляторної батареї  $i(\tau)$  та відносної швидкості руху  $v(\tau)$  за відсутності на відрізку дороги між пунктами старту та зупинки населених пунктів і дорожніх знаків, що обмежують швидкість електромобіля, визначаються шляхом мінімізації критерію відносних витрат енергії  $e_k$  акумуляторної батареї, заданого у вигляді функціоналу (1), з урахуванням обмежень, заданих функціональною умовою (5) та умовою у вигляді диференціального рівняння (2) під час руху горизонтальним відрізком дороги, у вигляді диференціального рівняння (3) під час руху на спуск та у вигляді диференціального рівняння (4) під час руху на підйом. А сам процес мінімізації зводиться до розв'язання системи рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 0, \\ L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0, \\ L_\psi - \frac{d}{d\tau} L_{\psi'} = 0, \\ L_{s_*} - \frac{d}{d\tau} L_{s_*'} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

складених з використанням функції Лагранжа

$$L(\tau, u, i, v, s_*, \psi, u', i', v', s_*', \psi') = (1 - \alpha i) i + \lambda_1 \left( v' - \ln \left( i + \sqrt{i^2 + 1} \right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*'^2} s_*' + f_0 + f_1 v + f_2 v^2 \right) + \lambda_2 (\psi' - v), \quad (15)$$

де  $\psi$  — функціонал (5), в якому:

- відпущено верхню межу, під час руху електромобіля горизонтальним відрізком дороги;
- з використанням функції Лагранжа, яка має структуру, аналогічну функції (15), але в дужках біля  $\lambda_1$  підставлено різницю між правою і лівою частинами рівняння (3), у разі здійснення руху на спуск;
- з використанням функції Лагранжа, яка має структуру, аналогічну функції (15), але в дужках біля  $\lambda_1$  підставлено різницю між правою і лівою частинами рівняння (4), у разі здійснення руху на підйом.

Порівнюючи рівняння (3), (4) динаміки руху електромобіля, відповідно, на спуск та на підйом з рівнянням (2) динаміки його руху горизонтальним відрізком дороги, бачимо, що вони відрізняються лише появою двочленів

$$\left( f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta \right); \quad (16)$$

$$\left( -f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta \right) \quad (17)$$

замість одноклена  $(-f_0)$ , які безпосередньо не залежать від  $i, i', v, v', \psi, \psi', s_*, s_*'$ . Тож, оскільки саме по цих змінних беруться частинні похідні в рівняннях Ейлера–Лагранжа (14), то навіть після уведення у функцію Лагранжа (15) обмеження не у вигляді (2), а у вигляді (3) чи (4), все одно в якості розв'язку цієї системи рівнянь отримаємо, як показано в роботі [1], рівняння

$$2a\sqrt{i^2 + 1}(1 - 2\alpha i) - \left( C_1 e^{(f_1 \tau + 2f_2 \int v d\tau)} - \frac{C_2}{f_1 + 2f_2 v} \right) \frac{(a^2 + b^2)}{b} = 0, \quad (18)$$

в якому  $C_1, C_2$  — сталі, що визначаються в процесі ідентифікації, а тому синтезувати моделі оптимального руху необхідно, з системи двох рівнянь, в якій першим рівнянням фігуруватиме рівняння (18), а другим рівнянням буде рівняння (2) під час руху горизонтальним відрізком дороги, рівняння (3) під час руху на спуск та рівняння (4) під час руху на підйом.

Але, як показано в нашій роботі [2], процедура синтезу моделей оптимального руху електромобіля ускладнюється навіть під час руху горизонтальним відрізком дороги, якщо на дорозі його руху виникає населений пункт, в якому швидкість руху обмежується до рівня  $v_{01}$ . У цьому випадку функція Лагранжа набуває вигляду

$$L(\tau, u, i, v, s_*, \psi, u', i', v', s_*', \psi') = (1 - \alpha i) i + \lambda_1 \left( v' - \ln \left( i + \sqrt{i^2 + 1} \right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*'^2} s_*' + f_0 + f_1 v + f_2 v^2 \right) + \lambda_2 (\psi' - v) + \lambda_3 (v - v_{01}), \quad (19)$$

в якій обмеження у формі функціоналу (5) використовується при оптимізації лише для визначення складової швидкості  $v_{op}(\tau)$  на відрізку часу  $[0, \tau_1]$  і лише у випадку, коли електромобіль починає і закінчує рух в межах населеного пункту, а коли електромобіль закінчує рух в межах населеного пункту, але починає рух за його межами, то обмеження у формі функціоналу (5) використовується при оптимізації лише для визначення складової швидкості  $v_{op}(\tau)$  на відрізку часу  $[0, \tau_0]$ . А за оптимізації на відрізку часу  $[\tau_2, \tau_{k1}]$  у першому випадку для визначення складової швидкості  $v_{op1}(\tau)$  інтегральне обмеження (5) замінюється інтегральним обмеженням

$$l_{k1} = \int_{\tau_2}^{\tau_{k1}} v d\tau, \quad (20)$$

в якому

$$l_{k1} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (v_{op}(\tau) - v_{ob}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_{k1}} v_{op}(\tau) d\tau, \quad (21)$$

а у другому випадку інтегральне обмеження (5) теж замінюється інтегральним обмеженням (20), але в якому ліву частину уже треба обчислювати не за допомогою виразу (21), а використовуючи вираз,

$$l_{k1} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (v_{op}(\tau) - v_{obo}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (v_{op}(\tau) - v_{ol}) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_k} v_{op}(\tau) d\tau. \quad (22)$$

У першому випадку отримуємо екстремаль  $v_{op}^*(\tau)$  для функціоналу (1) у формі складеної функції, що матиме вигляд

$$v_{op}^*(\tau) = \begin{cases} v_{op}(\tau), & \tau \in [0, \tau_1], \\ v_{ob}(\tau), & \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ v_{op1}(\tau), & \tau \in [\tau_2, \tau_{k1}], \end{cases} \quad (23)$$

у другому випадку отримуємо екстремаль  $v_{op}^*(\tau)$  для функціоналу (1) у формі складеної функції вигляду

$$v_{op}^*(\tau) = \begin{cases} v_{op}(\tau), & \tau \in [0, \tau_0], \\ v_{obo}(\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1], \\ v_{ob}(\tau), & \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ v_{op1}(\tau), & \tau \in [\tau_2, \tau_{k1}]. \end{cases} \quad (24)$$

Зауважуємо, що у виразах (20)—(24) позначення змінних та їх індексація здійснена у прив'язці до рис. 1 та 2 нашої роботи [2]. З цієї ж роботи подамо і вирази для  $v_{ob}(\tau)$  та  $v_{obo}(\tau)$  — вони мають вигляд

$$v_{ob}(\tau) = v_{01}; \quad (25)$$

$$v_{obo}(\tau) = v_{op}(\tau_0) - \frac{v_{op}(\tau_0) - v_{01}}{\tau_1 - \tau_0} (\tau - \tau_0). \quad (26)$$

Ну а тепер перейдемо до синтезу моделей оптимального руху електромобіля, якщо на дорозі його руху виникає населений пункт, в якому швидкість обмежується до рівня  $v_{01}$  і мають місце спуски або підйоми.

Почнемо процедуру оптимізації з випадку, коли електромобіль і починає рух і закінчує його в межах населеного пункту, в якому дорога має спуски або підйоми. У цьому випадку графік його оптимального руху матиме вигляд, показаний на рис. 1.

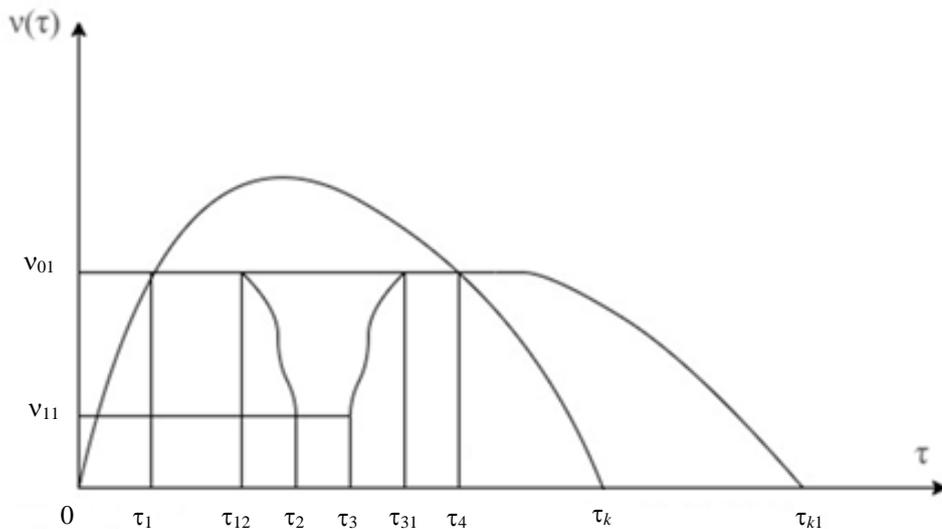


Рис. 1. Орієнтовна траєкторія швидкості оптимального руху електромобіля з зупинкою в населеному пункті і зі стартом в цьому ж населеному пункті та за наявності в ньому на дорозі спуску та підйому

З рис. 1 випливає, що швидкість  $v_{op}^*(\tau)$  оптимального руху електромобіля є складеною функцією зі структурою

$$v_{op}^*(\tau) = \begin{cases} v_{op}(\tau), & \tau \in [0, \tau_1], \\ v_{01}, & \tau \in [\tau_1, \tau_{12}], \\ v_{op01}(\tau), & \tau \in [\tau_{12}, \tau_2], \\ v_{11}, & \tau \in [\tau_2, \tau_3], \\ v_{op02}(\tau), & \tau \in [\tau_3, \tau_{31}], \\ v_{01}, & \tau \in [\tau_{31}, \tau_4], \\ v_{op1}(\tau), & \tau \in [\tau_4, \tau_{k1}], \end{cases} \quad (27)$$

в якій  $v_{op}(\tau)$  — оптимальна швидкість електромобіля на ділянці його розгону зі старту до досягнення швидкості, дозволеної у населеному пункті, тобто на ділянці « $0—v(\tau_1)$ » кривої графіка;  $v_{01}$  — стала швидкість на ділянці « $v(\tau_1)—v(\tau_{12})$ » кривої графіка, обумовлена обмеженням;  $v_{op01}(\tau)$  — оптимальна швидкість на ділянці « $v(\tau_{12})—v(\tau_2)$ » кривої графіка, тобто, на ділянці спуску чи підйому дороги;  $v_{11}$  — стала швидкість на ділянці « $v(\tau_2)—v(\tau_3)$ » кривої графіка, обумовлена вимогою не перевищувати навантаження на осі коліс при переході зі спуску дороги на її горизонтальний відрізок та вимогою збереження електромобілем керованості при переході з підйому дороги на її горизонтальний відрізок;  $v_{op02}(\tau)$  — оптимальна швидкість на ділянці « $v(\tau_3)—v(\tau_{31})$ » кривої графіка, тобто, на ділянці переходу від спуску чи підйому дороги на рівень швидкості, дозволеної у населеному пункті;  $v_{11}$  — стала швидкість на ділянці « $v(\tau_{31})—v(\tau_4)$ » кривої графіка, обумовлена обмеженням;  $v_{op1}(\tau)$  — оптимальна швидкість на ділянці « $v(\tau_4)—v(\tau_{k1})$ » кривої графіка, тобто, на ділянці завершення руху до зупинки електромобіля.

Цілком очевидно, що складові  $v_{01}$ ,  $v_{11}$  визначення не потребують, оскільки вони задаються апіорі дорожнім обмеженням на швидкість в населеному пункті та технологічним обмеженням при виїзді зі спуску чи підйому на горизонтальний відрізок дороги.

Щодо складової  $v_{op}(\tau)$ , то вона визначається з системи рівнянь, першим з яких є рівняння (18), а другим — рівняння (2) у сукупності з обмеженням (5).

Отже заслуговують окремого розгляду лише процедури визначення складових  $v_{op01}(\tau)$ ,  $v_{op02}(\tau)$  та  $v_{op1}(\tau)$ , до викладення яких ми і приступимо.

І почнемо з процедури визначення складової  $v_{op01}(\tau)$  під час руху електромобіля на спуск.

У цьому випадку як ліву граничну умову матимемо вираз

$$v_{op01}(\tau_{12}) = v_{01}, \quad (28)$$

функція Лагранжа матиме вигляд

$$L(\tau, u, i, v, s_*, \psi, u', i', v', s_*', \psi') = (1 - \alpha i) i + \left( v' - \ln \left( i + \sqrt{i^2 + 1} \right) \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 s_*'^2} s_* - f_0^* \sin \beta + f_0 \cos \beta + f_1 v + f_2 \right) + \lambda_2 (\psi' - v) + \lambda_3 (v - v_{11}), \quad (29)$$

а замість обмеження у вигляді (20) матимемо обмеження у вигляді

$$l_{k12} = \int_{\tau_{12}}^{\tau_2} v d\tau, \quad (30)$$

в якому  $l_{k12}$  — довжина спуску.

Підставляючи функцію Лагранжа (29) у систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (14), ми знову ж таки отримуємо в якості її розв’язку рівняння (18), в якому, знову ж таки,  $C_1, C_2$  — сталі, що визначаються в процесі ідентифікації, а тому синтезувати моделі оптимального руху у цьому випадку необхідно, виходячи з системи двох рівнянь, в якій першим рівнянням фігуруватиме рівняння (18), а другим рівнянням буде рівняння (3) під час руху на спуск та рівняння (4) під час руху на підйом, але під час руху на підйом обмеження (30) уже характеризуватиме довжину підйому.

А далі розглянемо процедуру визначення складової  $v_{op02}(\tau)$  під час руху електромобіля наступним горизонтальним відрізком дороги.

У цьому випадку як ліву граничну умову матимемо вираз

$$v_{op02}(\tau_3) = v_{11}, \quad (31)$$

функція Лагранжа матиме вигляд (19), а замість обмеження у вигляді (30) матимемо обмеження у вигляді

$$l_{k22} = \int_{\tau_3}^{\tau_{31}} v d\tau, \quad (32)$$

в якому  $l_{k22}$  — довжина горизонтального відрізка дороги в межах від значення швидкості  $v_{11}$  до досягнення швидкістю рівня  $v_{01}$ .

Підставляючи функцію Лагранжа (19) у систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (14), ми знову ж таки отримуємо як її розв’язок рівняння (18), в якому також  $C_1, C_2$  — сталі, що визначаються в процесі ідентифікації, а тому синтезувати моделі оптимального руху у цьому випадку необхідно, виходячи з системи двох рівнянь, в якій першим рівнянням фігуруватиме рівняння (18), а другим рівнянням буде знову рівняння (2).

Ну і завершимо процедуру визначення складових у виразі (27) визначенням складової  $v_{op1}(\tau)$  під час руху електромобіля до зупинки тим же заключним горизонтальним відрізком дороги.

У цьому випадку як ліву граничну умову матимемо вираз

$$v_{op1}(\tau_4) = v_{01}, \quad (33)$$

функція Лагранжа матиме вигляд (19), а замість обмеження у вигляді (21) матимемо обмеження у вигляді

$$l_{k22} = \int_{\tau_4}^{\tau_{k1}} v d\tau, \quad (34)$$

де  $l_{k22}$  — довжина горизонтального відрізка дороги в межах від значення швидкості  $v(\tau)$  в момент часу  $\tau_4$  до досягнення нею нульового рівня в момент зупинки, яка визначається зі співвідношення

$$l_{k22} = \int_{\tau_1}^{\tau_{12}} (v_{op}(\tau) - v_{01}) d\tau + \int_{\tau_{12}}^{\tau_2} (v_{op}(\tau) - v_{op01}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_3} (v_{op}(\tau) - v_{11}) d\tau + \int_{\tau_3}^{\tau_{31}} (v_{op}(\tau) - v_{op02}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_{31}}^{\tau_4} (v_{op}(\tau) - v_{01}) d\tau + \int_{\tau_4}^{\tau_{k1}} v_{op}(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Підставляючи функцію Лагранжа (19) у систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (14), ми знову ж таки отримуємо як її розв’язок рівняння (18), в якому, знову ж таки,  $C_1, C_2$  — сталі, що визначаються в процесі ідентифікації, а тому синтезувати моделі оптимального руху у цьому випадку необхідно, виходячи з системи двох рівнянь, в якій першим рівнянням фігуруватиме рівняння (18), а другим рівнянням буде знову рівняння (2).

А далі перейдемо до процедури оптимізації у випадку, коли електромобіль починає рух за межами населеного пункту, а закінчує його в межах цього населеного пункту, в якому дорога має спуски або підйоми. У цьому випадку графік його оптимального руху матиме вигляд, показаний на рис. 2.

Порівнюючи рис. 2 з рис. 1, бачимо, що вони відрізняються лише наявністю на рисунку 2 відрізка зміни швидкості між моментами часу  $\tau_0$  та  $\tau_1$ , де  $\tau_0$  — це момент часу, в який водій електро-

мобіля побачив, що наближається до дорожнього знаку, який задає межу населеного пункту, а  $\tau_1$  — це момент часу, в який електромобіль перетинає цю межу.

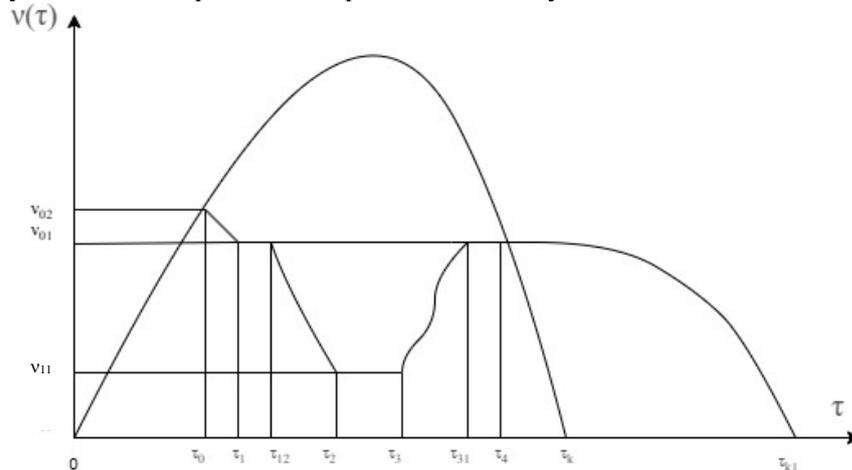


Рис. 2. Орієнтовна траєкторія швидкості оптимального руху електромобіля із зупинкою в населеному пункті, але зі стартом за межами цього населеного пункту та наявності у населеному пункті на дорозі спуску або підйому

Цілком очевидно, що на відрізку дороги, який долає електромобіль за відрізок часу  $\tau_1$  —  $\tau_0$ , водій знижує швидкість за лінійним законом  $v_{obo}(\tau)$  (вираз (26)), що дає нам право використати для визначення швидкості  $v_{op}^*(\tau)$  оптимального руху електромобіля у цьому випадку вираз (27), доповнивши його лише складовою  $v_{obo}(\tau)$  та змінивши індекс біля правої межі у першій складовій, тобто подавши його у вигляді

$$v_{op}^*(\tau) = \begin{cases} v_{op}(\tau), & \tau \in [0, \tau_0], \\ v_{obo}(\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1], \\ v_{01}, & \tau \in [\tau_1, \tau_{12}], \\ v_{op01}(\tau), & \tau \in [\tau_{12}, \tau_2], \\ v_{11}, & \tau \in [\tau_2, \tau_3], \\ v_{op02}(\tau), & \tau \in [\tau_3, \tau_{31}], \\ v_{01}, & \tau \in [\tau_{31}, \tau_4], \\ v_{op1}(\tau), & \tau \in [\tau_4, \tau_{k1}]. \end{cases} \quad (36)$$

А оскільки усі інші складові у складеній функції (36) повторюють відповідні складові функції, заданої виразом (27), то і обчислюються вони за тією ж вищевикладеною процедурою. І єдина відмінність процедури вначення складових виразу (36) від складових виразу (27) виникає на заключному етапі під час визначення складової  $v_{op1}(\tau)$ , оскільки у виразі (35), яким обчислюється параметр  $l_{k22}$ , у правій частині додається ще один інтервал у вигляді

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} (v_{op}(\tau) - v_{obo}(\tau)) d\tau. \quad (37)$$

На цьому ми і поставимо крапку у цій статті. А матеріал про те, як здійснити ідентифікацію синтезованих моделей, викладемо уже в нашій наступній статті, оскільки він буде досить громіздким, адже мова йтиме про розв'язання відносно функцій  $i(\tau)$  та  $v(\tau)$  систем двох рівнянь, кожне з яких відноситься не лише до класу нелінійних, але й до класу трансцендентних, а тому розв'язувати системи таких рівнянь можна лише методами послідовних наближень, алгоритми реалізації яких займуть чимало сторінок.

## Висновки

В доповнення до нашої роботи [2], в якій розв'язана задача синтезу математичних моделей оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом горизонтальним відрізком дороги за критерієм мінімуму витрат заряду силової акумуляторної батареї, але лише за умови, що електромобіль повинен проїхати від старту до фінішу за визначений термін часу та з урахуванням обмежень, обумовлених динамікою електромобіля та наявністю на цьому відрізку дороги населеного пункту, в якому правилами дорожнього руху обмежується швидкість, в цій роботі показано, що рух електромобіля через населений пункт з позицій його оптимізації суттєво відрізняється, якщо в населеному пункті дорога має спуски і підйоми.

Доведено, що алгоритм синтезу моделей оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом, який враховує у функції Лагранжа лише обмеження на швидкість в населеному пункті, обмеження на подолання певної відстані за заданий час та обмеження, обумовлені динамікою електромобіля, не дозволяє синтезувати моделі оптимального руху цього електромобіля, якщо у цьому населеному пункті дорога має спуски та підйоми.

Показано, якого вигляду набуває функція Лагранжа у випадку, коли в задачі синтезу моделей оптимального руху електромобіля необхідно враховувати не лише появу населеного пункту на його дорозі, але і появу спусків та підйомів дороги у цьому населеному пункті.

Синтезовано математичні моделі оптимального руху електромобіля за критерієм мінімуму витрат заряду силової акумуляторної батареї із зупинкою в межах населеного пункту і з початком його руху як в межах цього ж населеного пункту, так і поза його межами.

Синтезовані математичні моделі після їх ідентифікації можуть бути використані в програмах навчання штучного інтелекту з цільовим призначенням для керування електричними транспортними засобами з асинхронним електроприводом.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і В. В. Горенюк, *Системний аналіз оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом*, моногр. Вінниця: ВНТУ, 2023, 114 с. ISBN 978-966-641-946-3.
- [2] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і Б. Д. Пасека, «Математичні моделі оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом горизонтальним відрізком дороги за наявності на ньому населеного пункту та зупинкою у цьому пункті,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 2, с. 62-70, 2025. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2025-179-2-62-70>.
- [3] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і Б. Д. Пасека, «Математичні моделі оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом за наявності на дорозі спусків, підйомів і населеного пункту,» *Тези доповідей на МНТК ОКЕУ-2025*. Вінниця, листопад 2025 р., 1 с.

Рекомендована кафедрою системного аналізу та інформаційних технологій ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 10.11.2025

**Мокін Борис Іванович** — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

**Мокін Олександр Борисович** — д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: abmokin@gmail.com ;

**Пасека Богдан Володимирович** — аспірант кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: bogdanpaseka2000@gmail.com .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

**B. I. Mokin<sup>1</sup>**  
**O. B. Mokin<sup>1</sup>**  
**B. V. Pasiaka<sup>1</sup>**

## **Mathematical Models of Optimal Motion of an Electric Car with an Asynchronous Electric Drive in the Presence of Uphill, Downhill and Settlement on the Road, and a Stop in this Settlement**

<sup>1</sup>Vinnytsia National Technical University

*In our work [2], the problem of synthesizing mathematical models of optimal motion of an electric vehicle with an asynchronous electric drive along a horizontal section of the road is solved according to the criterion of minimum power battery charge consumption, but only on the condition that the electric vehicle must travel from the start to the finish line within a certain period of time and taking into account the limitations caused by the dynamics of the electric vehicle and the presence of a settlement on this section of the road in which the speed is limited by traffic rules. This paper shows that the motion of the electric vehicle through a settlement from the point of view of its optimization is significantly different if the road in the settlement has uphill and downhill, and it is proven that the algorithm for synthesizing models of optimal movement of an electric vehicle with an asynchronous electric drive, which takes into account in the Lagrange function only the speed limit in the settlement, the limit on overcoming a certain distance in a given time and the limits due to the dynamics of the electric vehicle, does not allow synthesizing models of optimal motion of this electric vehicle if the road in this settlement has uphill and downhill. It is shown what form the Lagrange function takes in case when in the problem of synthesizing models of optimal motion of an electric vehicle it is necessary to take into account not only the appearance of a settlement on its road, but also the appearance of uphill and downhill on the road in this settlement. Mathematical models of optimal electric vehicle motion, based on the criterion of minimum power battery charge costs with a stop within the settlement and with the start of its movement both within the limits of the same settlement and beyond have been synthesized. The synthesized mathematical models, after their identification, can be used in artificial intelligence training programs with a specific purpose for driving electric vehicles with an asynchronous electric drive.*

**Keywords:** electric vehicle, asynchronous electric drive, road through a settlement with descents and ascents, optimal movement models, criterion for minimum power battery charging costs, limitations by dynamics, distance, and road signs.

**Mokin Borys I.** — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

**Mokin Oleksandr B.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: abmokin@gmail.com ;

**Pasiaka Bohdan V.** — Post-Graduate Student of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: bogdanpaseka2000gmail.com