

О. В. Ключев¹
О. В. Садовой¹
Ю. В. Сохіна¹

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЇ АДАПТАЦІЇ СПОСТЕРІГАЧА ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДА

¹Дніпровський державний технічний університет, Кам'янське

Існує декілька загальновідомих структур спостерігача швидкості, отриманих з використанням прямого методу Ляпунова, який визначає структуру спостерігача, але не дозволяє знайти параметри ПІ-регулятора в його складі. Для одного з таких спостерігачів, структура якого визначається функцією адаптації як векторного добутку векторів потокозчеплення ротора і неузгодженості оцінювання струму статора, у цій статті розв'язується задача параметричного синтезу шляхом використання результатів аналізу стійкості лінеаризованих моделей вихідного нелінійного спостерігача. Спершу досліджено спостерігач тільки з інтегральною складовою і доведено, що система нейтрально-стійка з як завжди великими позитивними коефіцієнтами підсилення інтегральної складової. Виявлено, що крім нульового кореня спостерігач має асимптоти для дійсних частин інших коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи. Отримано аналітичні вирази для визначення граничних значень коренів через параметри рівнянь спостерігача. Далі додана пропорційна складова регулятора від функції адаптації і для такого спостерігача також отримано характеристичне рівняння його лінеаризованої моделі. Використовуючи алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца, отримані аналітичні співвідношення між величинами складових регулятора, за яких спостерігач залишається нейтрально-стійким. Зазначені співвідношення дозволили побудувати границі областей стійкості спостерігача в площині його параметрів для різних значень швидкостей обертання ротора асинхронної машини (АМ). Результатом проведеного аналізу стійкості з'явилося визначення доцільних границь для параметрів регулятора в складі спостерігача: нижньої границі для інтегральної складової і верхньої границі для пропорційної складової. Отримані властивості локальної стійкості за першим наближенням узагальнено на вихідну систему нелінійних рівнянь спостерігача. Можливість такого підходу для цієї динамічної системи перевірена методом математичного моделювання.

Ключові слова: спостерігач швидкості обертання, лінеаризована система диференціальних рівнянь, характеристичне рівняння, граничні значення коренів, нейтрально-стійка система.

Вступ

Наразі загальновідома методика синтезу спостерігачів швидкості в асинхронному електроприводі в класі систем з еталонною моделлю і визначенням структури функції адаптації на основі другої теореми О. М. Ляпунова про стійкість руху. Зазначений підхід містить операцію обчислення інтеграла через коефіцієнт пропорційності від функції адаптації з отриманням на виході інтегратора бажаної оцінки кутової швидкості ротора асинхронної машини. У статті [1] синтезована структура спостерігача швидкості з функцією адаптації, яка є векторним добутком векторів потокозчеплення ротора і помилки ідентифікації струмів статора. Проте параметри ПІ-регулятора в складі цього спостерігача підбиралися шляхом багаторазового розв'язання рівнянь математичної моделі замкнутої системи керування з підбором коефіцієнтів регулятора, виходячи з необхідної якості перехідних процесів. Усталених методів параметричного синтезу спостерігачів швидкості з еталонною моделлю не існує. Тому питання, як обчислювати коефіцієнти ПІ-регулятора спостерігача швидкості, залишається без строгого розв'язання.

У літературних джерелах зустрічаються різні способи розв'язання зазначеної задачі. Наприклад, у статті [2] досліджується проблема бездатчикової оцінки швидкості обертання ротора для

асинхронних двигунів. Проектується спостерігач Ляунбергера, який забезпечує глобальну асимптотичну стійкість системі керування. У матриці коригувальних зворотних зв'язків є три коефіцієнти, які потрібно визначити в процесі синтезу. Ці коефіцієнти задаються не як окремі числа, а вибираються з деяких діапазонів, обумовлених подвійними нерівностями. Зазначені умови, які накладаються на параметри зворотних зв'язків, формуються з умови негативної визначеності повної похідної за часом від функції Ляпунова, записаної для моделі асинхронної машини. Подібний підхід застосований у [3], тільки як функція адаптації в спостерігачі швидкості обертання береться векторний добуток оцінок вектора потокозчеплення ротора, отриманих з еталонної моделі статора та адаптивної моделі ротора. У статті [4] запропонований метод вибору коефіцієнтів підсилення спостерігача стану і проведена його верифікація на спостерігачі швидкості обертання асинхронної машини. Для визначення параметрів коригувальних зворотних зв'язків використовується генетичний алгоритм з цільовою функцією, яка заснована на імпульсній перехідній характеристиці спостерігача. Результати вибору коефіцієнтів підсилення з використанням запропонованого методу порівняно з результатами, отриманими на підставі розміщення полюсів лінеаризованих рівнянь помилки оцінювання. Запропонований у статті підхід дає результати, порівнянні з аналітичними методами, і не вимагає попередньої підготовки, яка складається в лінеаризації рівнянь спостерігача швидкості обертання. У [5] описується бездатчиковий асинхронний електропривод, у якому аналітичні вирази для коефіцієнтів підсилення спостерігача потокозчеплення виходять з умов його асимптотичної стійкості і є змінними величинами, які залежать від оцінки кутової швидкості обертання ротора. У [6] використовується теорія сингулярних збурень для зниження порядку системи рівнянь, на підставі якої далі синтезується спостерігач швидкості обертання, оскільки повільні електромеханічні процеси відокремлюються від швидких процесів досягнення струмами сталих значень і стабілізацією їх релейними регуляторами в ковзному режимі.

Основною складовою регулятора в спостерігачі швидкості обертання є інтегральна складова, яка впливає із самої методики структурного синтезу, заснованому на прямому методі О. М. Ляпунова, а пропорційної складової взагалі може не бути. Тому в цій статті ставиться задача розробити одну з можливих методик отримання оцінки коефіцієнта підсилення інтегратора від функції адаптації спостерігача швидкості обертання АМ та знайти його співвідношення з пропорційною складовою.

Результати роботи

Рівняння спостерігача швидкості обертання мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} p\hat{I}_{s\alpha} &= -a_{11}\hat{I}_{s\alpha} + a_{13}\hat{\Psi}_{r\alpha} + a_{14}\hat{\omega}\hat{\Psi}_{r\beta} + b_{11}u_{s\alpha}; \\ p\hat{I}_{s\beta} &= -a_{22}\hat{I}_{s\beta} + a_{24}\hat{\Psi}_{r\beta} - a_{23}\hat{\omega}\hat{\Psi}_{r\alpha} + b_{22}u_{s\beta}; \\ p\hat{\Psi}_{r\alpha} &= a_{31}\hat{I}_{s\alpha} - a_{33}\hat{\Psi}_{r\alpha} - \hat{\omega}\hat{\Psi}_{r\beta}; \\ p\hat{\Psi}_{r\beta} &= a_{42}\hat{I}_{s\beta} - a_{44}\hat{\Psi}_{r\beta} + \hat{\omega}\hat{\Psi}_{r\alpha}; \\ p\hat{\omega} &= \lambda \left[\hat{\Psi}_{r\alpha} (\hat{I}_{s\beta} - I_{s\beta}) - \hat{\Psi}_{r\beta} (\hat{I}_{s\alpha} - I_{s\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{де } a_{11} = a_{22} &= \frac{(R_s + k_r^2 R_r) L_r}{L_s L_r - L_m^2}; \quad a_{13} = a_{24} = \frac{k_r R_r}{L_s L_r - L_m^2}; \quad a_{23} = a_{14} = \frac{L_m}{L_s L_r - L_m^2}; \quad a_{31} = a_{42} = k_r R_r; \\ a_{33} = a_{44} &= R_r / L_r; \quad b_{11} = b_{22} = \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'яжемо задачу оцінки знаку і величини параметра λ , за яких спостерігач (1) зберігає стійкість і забезпечує необхідну якість відстеження змінних стану об'єкта керування, який спостерігається. Застосуємо стандартну методику визначення стійкості на основі характеристичного рівняння лінеаризованої системи. Методика заснована на першій теоремі О. М. Ляпунова про стійкість руху, що дозволяє на основі аналізу системи рівнянь першого наближення робити висновок про стійкість вихідної нелінійної системи. Зазначимо, що останнє рівняння (рівняння динаміки швидкості обертання) вже містить збурення струмів, тобто відхилення оцінок струмів від їхніх вимірюваних значень. Також з останнього рівняння видно, що швидкість обертання визначається як інтеграл від правої частини рівняння, яка не містить величини швидкості, тобто здійснюється чисте

інтегрування і спостерігач є нейтральним об'єктом з одним нульовим коренем характеристичного рівняння. З урахуванням сказаного і формул (2) рівняння збуреного руху спостерігача (1) набувають вигляду

$$p \begin{pmatrix} \Delta \widehat{I}_{s\alpha} \\ \Delta \widehat{I}_{s\beta} \\ \Delta \widehat{\Psi}_{r\alpha} \\ \Delta \widehat{\Psi}_{r\beta} \\ \Delta \widehat{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14}\widehat{\omega}_{\infty} & a_{14}\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & -a_{11} & -a_{14}\widehat{\omega}_{\infty} & a_{13} & -a_{14}\widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} & -\widehat{\omega}_{\infty} & -\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & a_{31} & \widehat{\omega}_{\infty} & -a_{33} & \widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ -\lambda\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} & \lambda\widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \widehat{I}_{s\alpha} \\ \Delta \widehat{I}_{s\beta} \\ \Delta \widehat{\Psi}_{r\alpha} \\ \Delta \widehat{\Psi}_{r\beta} \\ \Delta \widehat{\omega} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де вважається, що сталі значення оцінок дорівнюють оцінюваним змінним

$$\widehat{I}_{s\alpha\infty} = I_{s\alpha}; \quad \widehat{I}_{s\beta\infty} = I_{s\beta}; \quad \widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} = \Psi_{r\alpha}; \quad \widehat{\Psi}_{r\beta\infty} = \Psi_{r\beta}; \quad \widehat{\omega}_{\infty} = \omega. \quad (4)$$

Характеристичне рівняння записується в такий спосіб:

$$|A - pE| = \begin{vmatrix} -a_{11} - p & 0 & a_{13} & a_{14}\widehat{\omega}_{\infty} & a_{14}\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & -a_{11} - p & -a_{14}\widehat{\omega}_{\infty} & a_{13} & -a_{14}\widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} - p & -\widehat{\omega}_{\infty} & -\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & a_{31} & \widehat{\omega}_{\infty} & -a_{33} - p & \widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ -\lambda\widehat{\Psi}_{r\beta\infty} & \lambda\widehat{\Psi}_{r\alpha\infty} & 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Розкриваємо визначник і записуємо вирази для коефіцієнтів при степенях оператора p характеристичного полінома:

$$\begin{aligned} p^5 &: 1; \quad p^4: 2a_{11} + 2a_{33}; \\ p^3 &: \lambda\Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + a_{11}^2 + a_{33}^2 + 4a_{11}a_{33} - 2a_{13}a_{31}; \\ p^2 &: \lambda\Psi_r^2 a_{11}a_{14} + 2\lambda\Psi_r^2 a_{14}a_{33} - \lambda\Psi_r^2 a_{13} + 2a_{11}\omega^2 - 2a_{14}a_{31}\omega^2 + 2a_{11}^2 a_{33} + 2a_{11}a_{33}^2 - 2a_{11}a_{13}a_{31} - \\ &+ 2a_{13}a_{31}a_{33}; \\ p^1 &: \lambda\Psi_r^2 a_{14}a_{33}^2 + 2\lambda\Psi_r^2 a_{11}a_{14}a_{33} - \lambda\Psi_r^2 a_{11}a_{13} - \lambda\Psi_r^2 a_{13}a_{33} - \lambda\Psi_r^2 a_{13}a_{14}a_{31} + \\ &+ (a_{11}^2 + a_{14}^2 a_{31}^2 - 2a_{11}a_{14}a_{31})\omega^2 + a_{11}^2 a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{31}^2 - 2a_{11}a_{13}a_{31}a_{33}; \\ p^0 &: \lambda\Psi_r^2 (a_{11}a_{14}a_{33}^2 + a_{31}a_{13}^2 - a_{11}a_{13}a_{33} - a_{31}a_{33}a_{14}a_{13}). \end{aligned} \quad (6)$$

Вирази (6) отримані з урахуванням тотожностей (4) і співвідношення $\Psi_{r\alpha}^2 + \Psi_{r\beta}^2 = \Psi_r^2$.

Розглянемо останній коефіцієнт у виразах (6)

$$a_{11}a_{14}a_{33}^2 + a_{31}a_{13}^2 - a_{11}a_{13}a_{33} - a_{31}a_{33}a_{14}a_{13} = (a_{14}a_{33} - a_{13})(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) = 0, \quad (7)$$

оскільки $a_{14}a_{33} - a_{13} = 0$, враховуючи значення (2).

Таким чином, вільний коефіцієнт дорівнює нулю і лінеаризований об'єкт (3) має один нульовий корінь характеристичного рівняння, що вказує на те, що спостерігач містить одну чисто інтегровальну ланку в складі своєї передавальної функції. Наявність інтегровальної ланки вказує на те, що система здатна підтримувати постійну вихідну величину оцінки швидкості обертання $\widehat{\omega}$ за відсутності вхідного сигналу, коли оцінки струмів і вимірних значень струмів збігаються, і їхня різниця прямує до нуля: $\widehat{I}_{s\alpha} - I_{s\alpha} = 0$, $\widehat{I}_{s\beta} - I_{s\beta} = 0$. Спостерігачі швидкості, синтезовані на основі другої теореми О. М. Ляпунова про стійкість руху, можуть мати різні функції адаптації. Вони набувають нульове значення в сталому режимі, але інтеграл від цих функцій адаптації дає оцінку швидкості обертання ротора асинхронного електропривода. Таким чином, усі спостерігачі швидкості обертання зазначеного типу є нейтральними динамічними системами. З'ясуємо, які умови повинні накладатися на параметр λ , щоб спостерігач (1) мав нейтральну стійкість, тобто щоб усі корені

характеристичного рівняння, не враховуючи нульовий, мали негативну дійсну частину і загасали всі перехідні процеси, пов'язані з цими коренями.

Характеристичний поліном системи (3) має вигляд

$$b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad (8)$$

у якому вільний коефіцієнт дорівнює нулю ($b_0 = 0$), а інші коефіцієнти визначаються виразами

$$\begin{aligned} b_5 &= 1; \quad b_4 = 2a_{11} + 2a_{33}; \quad b_3 = \lambda \Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3; \\ b_2 &= \lambda \Psi_r^2 \bar{a}_{21} + \omega^2 \bar{a}_{22} + \bar{a}_{23}; \quad b_1 = \lambda \Psi_r^2 \bar{a}_{11} + \omega^2 \bar{a}_{12} + \bar{a}_{13}, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= a_{11}^2 + a_{33}^2 + 4a_{11}a_{33} - 2a_{13}a_{31}; \quad \bar{a}_{21} = a_{11}a_{14} + 2a_{14}a_{33} - a_{13}; \\ \bar{a}_{22} &= 2a_{11} - 2a_{14}a_{31}; \quad \bar{a}_{23} = 2a_{11}^2 a_{33} + 2a_{11}a_{33}^2 - 2a_{11}a_{13}a_{31} - 2a_{13}a_{31}a_{33}; \\ \bar{a}_{11} &= 2a_{11}a_{14}a_{33} + a_{14}a_{33}^2 - a_{11}a_{13} - a_{13}a_{33} - a_{13}a_{14}a_{31}; \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}^2 + a_{14}^2 a_{31}^2 - 2a_{11}a_{14}a_{31}; \quad \bar{a}_{13} = a_{11}^2 a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{31}^2 - 2a_{11}a_{13}a_{31}a_{33}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для типових промислових серій асинхронних машин (наприклад серія 4А) усі коефіцієнти (10) будуть позитивними числовими значеннями. Тому і коефіцієнти характеристичного полінома (9) також будуть більше нуля, що вказує на виконання необхідних умов стійкості підсистеми без ідеального інтегратора з таким характеристичним рівнянням

$$b_5 p^4 + b_4 p^3 + b_3 p^2 + b_2 p + b_1 = 0. \quad (11)$$

Визначимо, які умови накладає критерій стійкості Гурвіца на значення параметра λ . Якщо система стійка, то головні мінори матриці Гурвіца повинні бути позитивні. Умови, які потрібно перевірити, записуються в такий спосіб:

$$\Delta_1 = b_4 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 \\ b_5 & b_3 \end{vmatrix} = b_4 b_3 - b_2 b_5 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_4 & b_2 & 0 \\ b_5 & b_3 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_2 \end{vmatrix} = b_4 (b_3 b_2 - b_1 b_4) - b_5 b_2^2 > 0. \quad (12)$$

Підставляємо значення коефіцієнтів b_i з (9) у вирази визначника другого порядку і після перетворень отримуємо

$$(a_{11}a_{14} + a_{13}) \Psi_r^2 \lambda + (2a_{33} + 2a_{14}a_{31}) \omega^2 + 2a_{11}^3 + 8a_{11}a_{33}^2 + 8a_{11}^2 a_{33} + 2a_{33}^3 - 2a_{11}a_{13}a_{31} - 2a_{13}a_{31}a_{33} > 0. \quad (13)$$

Вирази в дужках і вільний коефіцієнт позитивні, тому з усіма $\lambda > 0$ виконується умова $\Delta_2 > 0$. Визначник третього порядку після підстановки в нього виразів для коефіцієнтів b_i можна записати в такий спосіб

$$\Delta_3 = d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0, \quad (14)$$

$$\text{де } d_2 = (b_4 a_{14} \bar{a}_{21} - \bar{a}_{21}^2) \Psi_r^4; \quad d_1 = (b_4 a_{14} \bar{a}_{22} + b_4 \bar{a}_{21} - 2\bar{a}_{21} \bar{a}_{22}) \Psi_r^2 \omega^2 + (b_4 a_{14} \bar{a}_{23} + b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{21} - b_4^2 \bar{a}_{11} - 2\bar{a}_{21} \bar{a}_{23}) \Psi_r^2;$$

$$d_0 = (b_4 \bar{a}_{22} - \bar{a}_{22}^2) \omega^4 + (b_4 \bar{a}_{23} + b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{22} - b_4^2 \bar{a}_{12} - 2\bar{a}_{22} \bar{a}_{23}) \omega^2 + (b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{23} - b_4^2 \bar{a}_{13} - \bar{a}_{23}^2). \quad (15)$$

Вирази в дужках коефіцієнтів d_i усі позитивні. Тому ці коефіцієнти позитивні за будь-яких значень швидкості обертання ω і визначник (14) буде більше нуля, якщо $\lambda > 0$. Отже, можна сказати, що всі корені характеристичного рівняння системи (3), крім нульового кореня, будуть лежати в лівій напівплощині комплексної площини коренів, і спостерігач (1) буде зберігати стійкість за будь-якого $\lambda > 0$.

Передбачається, що спостерігач швидкості обертання (1) використовується в системі векторного керування АМ, у якій модуль опорного вектора поточозчеплення ротора стабілізується системою керування на номінальному рівні Ψ_m . Тоді, як випливає з виразів (9), коефіцієнти b_i рівняння (11) залежать від кутової швидкості обертання ротора ω та від параметра λ . Для АМ серії 4А в

середовищі Mathcad багаторазово розв'язувалося рівняння (11) з різними значеннями коефіцієнтів b_i , отриманих у разі нарощування параметра λ з фіксованими значеннями швидкості обертання. З'ясувалося, що рівняння (11) має два негативних дійсних корені і пару комплексно-сполучених коренів з негативною дійсною частиною. До прикладу, на рис. 1 показані результати розрахунків для АМ типу 4A132M4УЗ, представлених у вигляді сімейств кривих залежності коренів рівняння (11) від параметра спостерігача λ за різних фіксованих значень кутової швидкості обертання ротора ω . Для дійсних коренів і дійсної частини пари комплексно-сполучених коренів виявлена наявність горизонтальних асимптот, які визначають граничні значення коренів рівняння (11) за необмеженого збільшення параметра λ . Знайдемо аналітичні вирази цих граничних значень.

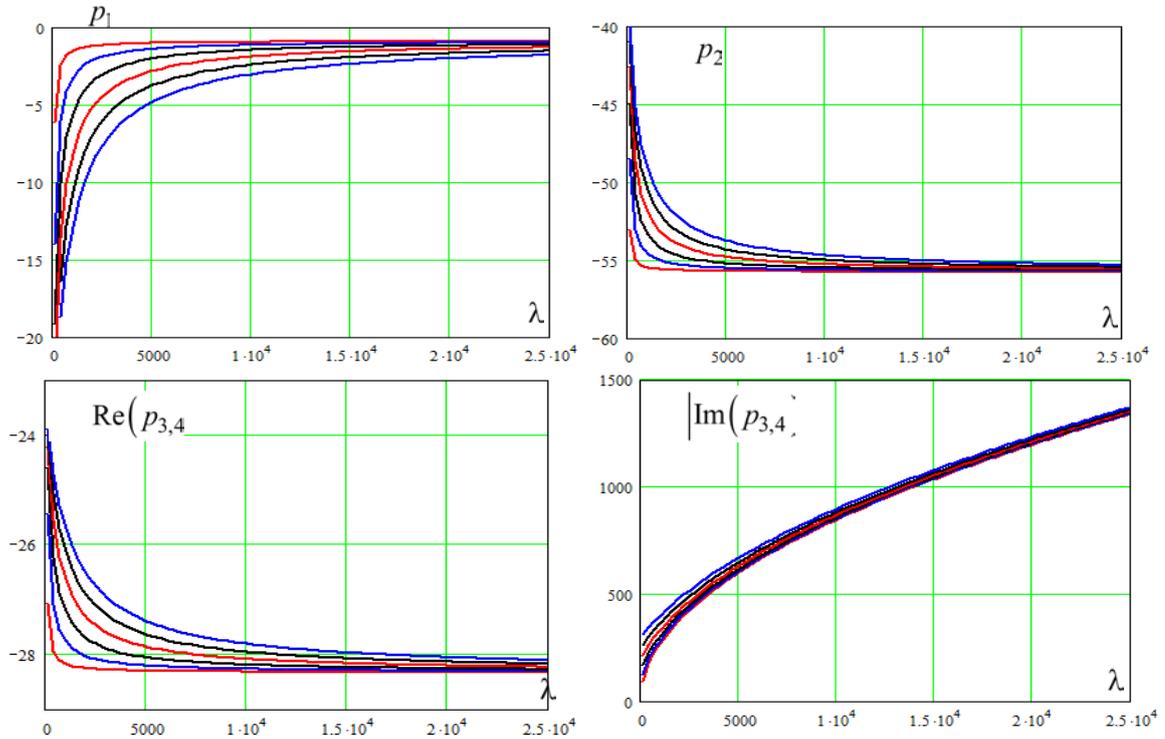


Рис. 1. Залежності коренів рівняння (11) від коефіцієнта підсилення інтегратора λ в складі спостерігача швидкості (1)

Коефіцієнти b_4 , b_5 від параметра λ не залежать і незмінні. Інші коефіцієнти b_i необмежено зростають зі збільшенням λ до нескінченності. Рівняння (11) можна записати у такий спосіб:

$$\frac{b_5}{b_3} p^4 + \frac{b_4}{b_3} p^3 + p^2 + \frac{b_2}{b_3} p + \frac{b_1}{b_3} = 0. \quad (16)$$

Знайдемо границі співвідношень у поліномі (16):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{b_5}{b_3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3} = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{b_4}{b_3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2a_{11} + 2a_{33}}{\lambda \Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3} = 0;$$

$$c_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{b_2}{b_3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda \Psi_r^2 \bar{a}_{21} + \omega^2 \bar{a}_{22} + \bar{a}_{23}}{\lambda \Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3} = \frac{\bar{a}_{21}}{a_{14}}; \quad c_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{b_1}{b_3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda \Psi_r^2 \bar{a}_{11} + \omega^2 \bar{a}_{12} + \bar{a}_{13}}{\lambda \Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3} = \frac{\bar{a}_{11}}{a_{14}}. \quad (17)$$

Якщо $\lambda \rightarrow \infty$, то рівняння (16) вироджується в таке квадратне рівняння:

$$p^2 + c_1 p + c_0 = 0, \quad (18)$$

з коренями, які визначаються за формулами

$$p_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0}}{2} = -\frac{\bar{a}_{21}}{2a_{14}} \pm \frac{\sqrt{\bar{a}_{21}^2 - 4\bar{a}_{11}a_{14}}}{2a_{14}}, \quad (19)$$

які є координатами асимптот — граничними значеннями для двох дійсних коренів рівнянь (11) і (8).

Далі розглянемо умови теореми Вієта для рівняння четвертого ступеня

$$\begin{aligned} -b_4/b_5 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 ; \quad b_3/b_5 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 ; \\ -b_2/b_5 &= p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4 ; \quad b_1/b_5 = p_1p_2p_3p_4 . \end{aligned} \quad (20)$$

З теореми Вієта для квадратного рівняння випливає $p_1 + p_2 = -c_1$. Комплексно-сполучені корені мають вигляд $\alpha \pm j\beta$, сума яких дорівнює $p_3 + p_4 = 2\alpha$. Тоді перша тотожність (20) для граничного випадку буде $-b_4/b_5 = -c_1 + 2\alpha$, з якого знаходимо α з урахуванням (17), (10) і (9). Після перетворень отримаємо дійсну частину комплексно-сполучених коренів

$$\alpha = -\frac{a_{11}a_{14} + a_{13}}{2a_{14}} . \quad (21)$$

З теореми Вієта для рівняння (18) випливає $p_1p_2 = c_0$, а добуток комплексно-сполучених коренів дорівнює $p_3p_4 = \alpha^2 + \beta^2$. Тоді четверта тотожність (20) набуде вигляду

$$b_1/b_5 = c_0(\alpha^2 + \beta^2), \quad (22)$$

з якої з урахуванням (17), (10) і (9) після перетворень знаходиться аналітичний вираз для уявної частини комплексно-сполучених коренів

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{a_{14}(\lambda \Psi_r^2 \bar{a}_{11} + \omega^2 \bar{a}_{12} + \bar{a}_{13})}{\bar{a}_{11}} - \alpha^2} . \quad (23)$$

Графіки величин $\text{Im}(p_{3,4})$ на рис. 1 описуються аналітичними виразами (23) як функцією $\beta(\lambda)$. З формул (19) і (21) випливає, що граничні значення дійсних коренів і дійсна частина комплексно-сполучених коренів не залежать від кутової швидкості ротора і модуля вектора потокозчеплення ротора АМ. Тому за достатньо великих значень параметра λ ($\lambda > 2 \cdot 10^4$) динамічні властивості спостерігача (1) стають інваріантними до величини кутової швидкості обертання ротора ω і модуля вектора потокозчеплення ротора Ψ_r . Виконується співвідношення $p_2 < \alpha < p_1$. Тому швидкість загасання перехідних процесів у спостерігачі визначається найближчим до уявної осі коренем характеристичного рівняння, а саме величиною кореня p_1 .

Наявність тільки інтегральної складової в регуляторі спостерігача швидкості обертання призводить до підвищеної коливальності системи керування, оскільки інтегратор вводить у контур зворотного зв'язку фазове відставання сигналу на 90 градусів, що знижує запас стійкості системи керування. Тому, зазвичай, додають пропорційну складову в регулятор спостерігача, що призводить до зменшення фазового зрушення сигналу оцінки швидкості. Розглянемо останнє рівняння системи (1) у такому вигляді

$$\hat{\omega} = \left(\tau + \frac{\lambda}{p} \right) \left[\hat{\Psi}_{r\alpha} (\hat{I}_{s\beta} - I_{s\beta}) - \hat{\Psi}_{r\beta} (\hat{I}_{s\alpha} - I_{s\alpha}) \right], \quad (24)$$

для якого оцінка параметра λ вже проведена і потрібно з умов стійкості спостерігача знайти значення пропорційної складової τ . Запишемо рівняння (24) інакше

$$p\hat{\omega} = (\lambda + \tau p) \left[\hat{\Psi}_r \times \Delta \hat{I}_s \right], \quad (25)$$

де похідна від векторного добутку векторів набуває вигляду

$$p \left[\hat{\Psi}_r \times \Delta \hat{I}_s \right] = p \left(\left| \hat{\Psi}_r \right| \cdot \left| \Delta \hat{I}_s \right| \sin \phi \right) = \left| \hat{\Psi}_r \right| \cdot \left| \Delta \hat{I}_s \right| \cos \phi = \hat{\Psi}_r \cdot \Delta \hat{I}_s = \hat{\Psi}_{r\alpha} \Delta \hat{I}_{s\alpha} + \hat{\Psi}_{r\beta} \Delta \hat{I}_{s\beta} . \quad (26)$$

З урахуванням (26) рівняння (25) запишеться так:

$$p\hat{\omega} = \lambda \begin{vmatrix} \hat{\Psi}_{r\alpha} & \hat{\Psi}_{r\beta} \\ \Delta\hat{I}_{s\alpha} & \Delta\hat{I}_{s\beta} \end{vmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{r\alpha} & \hat{\Psi}_{r\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\hat{I}_{s\alpha} & \Delta\hat{I}_{s\beta} \end{pmatrix}^T = (\tau\hat{\Psi}_{r\alpha} - \lambda\hat{\Psi}_{r\beta})\Delta\hat{I}_{s\alpha} + (\tau\hat{\Psi}_{r\beta} + \lambda\hat{\Psi}_{r\alpha})\Delta\hat{I}_{s\beta}, \quad (27)$$

і може вважатися лінеаризованим за малих відхилень $\Delta\hat{I}_{s\alpha}$, $\Delta\hat{I}_{s\beta}$.

Тоді замість системи лінеаризованих рівнянь (3) потрібно розглянути систему

$$p \begin{pmatrix} \Delta\hat{I}_{s\alpha} \\ \Delta\hat{I}_{s\beta} \\ \Delta\hat{\Psi}_{r\alpha} \\ \Delta\hat{\Psi}_{r\beta} \\ \Delta\hat{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{14}\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & -a_{11} & -a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{13} & -a_{14}\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} & -\hat{\omega}_{\infty} & -\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & a_{31} & \hat{\omega}_{\infty} & -a_{33} & \hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ -\lambda\hat{\Psi}_{r\beta\infty} + \tau\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} & \lambda\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} + \tau\hat{\Psi}_{r\beta\infty} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\hat{I}_{s\alpha} \\ \Delta\hat{I}_{s\beta} \\ \Delta\hat{\Psi}_{r\alpha} \\ \Delta\hat{\Psi}_{r\beta} \\ \Delta\hat{\omega} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Характеристичне рівняння системи (28) має вигляд

$$|A - pE| = \begin{vmatrix} -a_{11} - p & 0 & a_{13} & a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{14}\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & -a_{11} - p & -a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{13} & -a_{14}\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} - p & -\hat{\omega}_{\infty} & -\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & a_{31} & \hat{\omega}_{\infty} & -a_{33} - p & \hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ -\lambda\hat{\Psi}_{r\beta\infty} + \tau\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} & \lambda\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} + \tau\hat{\Psi}_{r\beta\infty} & 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Якщо розкласти визначник (29) по останньому рядку, то видно, що його можна представити сумою двох визначників, а саме визначника (5) і наступного визначника

$$\begin{vmatrix} -a_{11} - p & 0 & a_{13} & a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{14}\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & -a_{11} - p & -a_{14}\hat{\omega}_{\infty} & a_{13} & -a_{14}\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} - p & -\hat{\omega}_{\infty} & -\hat{\Psi}_{r\beta\infty} \\ 0 & a_{31} & \hat{\omega}_{\infty} & -a_{33} - p & \hat{\Psi}_{r\alpha\infty} \\ \tau\hat{\Psi}_{r\alpha\infty} & \tau\hat{\Psi}_{r\beta\infty} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (30)$$

який після розкриття є поліномом другого степеня з такими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} p^2 : \bar{b}_2 &= a_{14}\tau\omega\Psi_r^2; \\ p^1 : \bar{b}_1 &= (a_{11}a_{14} + a_{14}a_{33} - a_{31}a_{14}^2 - a_{13})\tau\omega\Psi_r^2 = \bar{a}_1\tau\omega\Psi_r^2; \\ p^0 : \bar{b}_0 &= (a_{11}a_{14}a_{33} + a_{31}a_{14}a_{13} - a_{31}a_{33}a_{14}^2 - a_{11}a_{13})\tau\omega\Psi_r^2 = \bar{a}_0\tau\omega\Psi_r^2. \end{aligned} \quad (31)$$

У співвідношеннях (31) коефіцієнт $\bar{a}_0 = 0$, отже, $\bar{b}_0 = 0$, оскільки, з урахуванням (2), буде

$$a_{11}a_{14}a_{33} + a_{31}a_{14}a_{13} - a_{31}a_{33}a_{14}^2 - a_{11}a_{13} = (a_{13} - a_{33}a_{14})(a_{31}a_{14} - a_{11}) = 0. \quad (32)$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння (29) знаходяться як суми коефіцієнтів (9) і (31):

$$\begin{aligned} B_5 &= b_5 = 1; \quad B_4 = b_4 = 2a_{11} + 2a_{33}; \quad B_3 = b_3 = \lambda\Psi_r^2 a_{14} + \omega^2 + \bar{a}_3; \\ B_2 &= b_2 + \bar{b}_2 = \lambda\Psi_r^2 \bar{a}_{21} + \omega^2 \bar{a}_{22} + \bar{a}_{23} + a_{14}\tau\omega\Psi_r^2; \\ B_1 &= b_1 + \bar{b}_1 = \lambda\Psi_r^2 \bar{a}_{11} + \omega^2 \bar{a}_{12} + \bar{a}_{13} + \bar{a}_1\tau\omega\Psi_r^2; \quad B_0 = b_0 + \bar{b}_0 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Спостерігач швидкості обертання з ПІ-регулятором залишається нейтральним об'єктом. З'ясуємо, які співвідношення повинні бути між параметрами λ і τ , щоб спостерігач швидкості обертання зберігав нейтральну стійкість.

Для стійкості збуреного руху, який описується системою (28), необхідно і достатнє виконання умов Гурвіца

$$\Delta_1 = B_4 > 0; \Delta_2 = B_4 B_3 - B_2 B_5 > 0; \Delta_3 = B_4 (B_3 B_2 - B_1 B_4) - B_5 B_2^2 > 0. \quad (34)$$

Перша умова виконується. З другої нерівності, після підстановки в неї виразів (33) і перетворень, отримаємо таке співвідношення

$$\tau < \frac{\lambda(b_4 a_{14} - \bar{a}_{21}) \Psi_r^2 + (b_4 - \bar{a}_{22}) \omega^2 + b_4 \bar{a}_3 - \bar{a}_{23}}{a_{14} \Psi_r^2 \omega}. \quad (35)$$

Третя нерівність з (34) після підстановки коефіцієнтів (33) і перетворень, записується так:

$$f(\lambda, \tau) = D_1 \lambda^2 + D_2 \tau^2 + D_3 \lambda \tau + D_4 \lambda + D_5 \tau + D_6 > 0, \quad (36)$$

де коефіцієнти D_i , $i=1, \dots, 6$, визначаються виразами

$$\begin{aligned} D_1 &= \Psi_r^4 (b_4 a_{14} \bar{a}_{21} - \bar{a}_{21}^2); \quad D_2 = -\Psi_r^4 a_{14}^2 \omega^2; \quad D_3 = \Psi_r^4 \omega (b_4 a_{14}^2 - 2a_{14} \bar{a}_{21}); \\ D_4 &= \Psi_r^2 (b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{21} + b_4 \bar{a}_{21} \omega^2 + b_4 a_{14} \bar{a}_{23} + b_4 a_{14} \bar{a}_{22} \omega^2 - 2\bar{a}_{21} \bar{a}_{23} - b_4^2 \bar{a}_{11} - 2\bar{a}_{21} \bar{a}_{22} \omega^2); \\ D_5 &= \Psi_r^2 \omega (b_4 a_{14} \bar{a}_3 + b_4 a_{14} \omega^2 - 2a_{14} \bar{a}_{23} - 2a_{14} \bar{a}_{22} \omega^2 - b_4^2 \bar{a}_1); \\ D_6 &= b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{22} \omega^2 + b_4 \bar{a}_3 \bar{a}_{23} + b_4 \bar{a}_{23} \omega^2 + b_4 \bar{a}_{22} \omega^4 - b_4^2 \bar{a}_{12} \omega^2 - 2\bar{a}_{22} \bar{a}_{23} \omega^2 - \bar{a}_{22}^2 \omega^4 - b_4^2 \bar{a}_{13} - \bar{a}_{23}^2 \end{aligned} \quad (37)$$

і задовольняють умовам

$$D_1 > 0; \quad D_2 < 0; \quad D_3 = 0; \quad D_4 > 0; \quad D_5 < 0; \quad D_6 > 0. \quad (38)$$

Вираз (36) є параболою відносно параметра τ . З урахуванням знаків коефіцієнтів (38) впливає, що ця парабола має точку максимуму, коли $\tau < 0$, яка розташовується вище осі абсцис (вісь τ). Тоді для $\lambda > 0$ і $\tau > 0$ умова (36) виконується на спадаючій гілці параболи для всіх позитивних значень λ з параметром τ , який задовольняє умові $0 < \tau < \tau_1$, де гранична точка τ_1 є права точка перетину параболи з віссю абсцис і знаходиться з формули

$$\tau_1 = \frac{-D_5 - \sqrt{D_5^2 - 4D_2(D_1 \lambda^2 + D_4 \lambda + D_6)}}{2D_2}. \quad (39)$$

Тому визначальним для стійкості системи (28) є умова (35), границі якої у площині параметрів (λ, τ) за різних значень ω , є сімейством зростаючих прямих ліній, показаних на рис. 2. Прямі побудовані за виразом (35) від першої до третьої для швидкостей 50, 100 і 300 с^{-1} відповідно. Таким чином, спостерігач швидкості для швидкостей обертання ротора нижче синхронної буде стійким в області параметрів, які знаходяться нижче прямої позначеної цифрою три. Графіки побудовані для параметрів АМ типу 4А132М4У3. Третій графік, побудований для найвищої швидкості, показує, що для стійкості спостерігача пропорційна складова τ повинна бути не менше ніж у п'ять разів меншою за інтегральну складову λ .

Досліджено динаміку АМ з векторним керуванням, коли зворотний зв'язок за швидкістю обертання замикається через спостерігач швидкості (1) з останнім рівнянням (24).

На рис. 3 показані графіки перехідних процесів кутової швидкості обертання ротора АМ і значення оцінки швидкості з виходу спостерігача, за яким замикається зворотний зв'язок за швидкістю в системі векторного полеорієнтованого керування АМ з лінійними регуляторами.

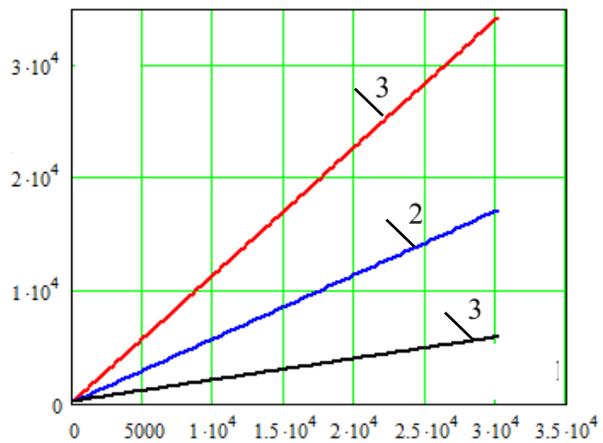


Рис. 2. Границі стійкості спостерігача швидкості у площині параметрів його ПІ-регулятора

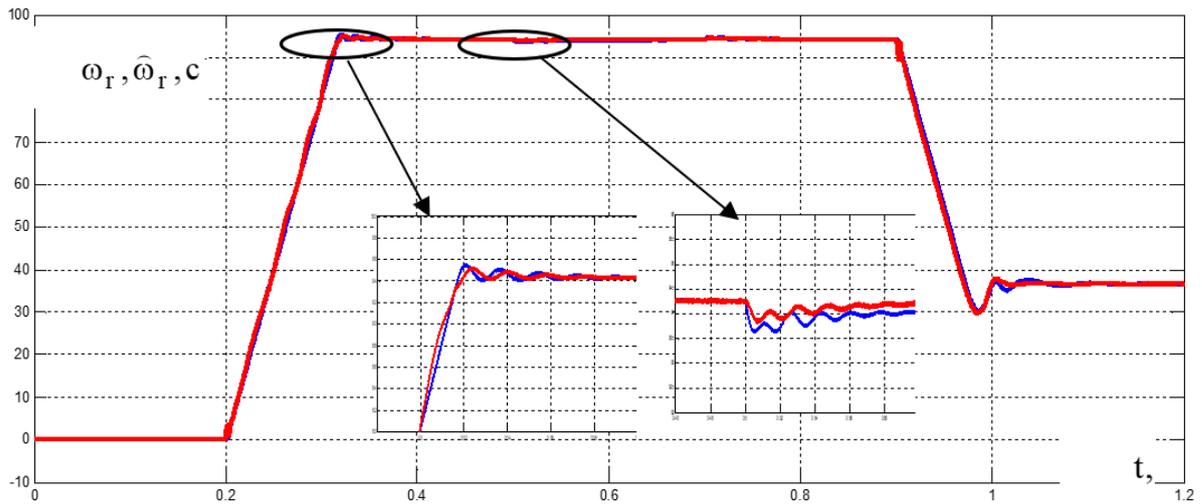


Рис. 3. Графіки перехідних процесів швидкості та її оцінки

Для спостерігача взяті такі значення параметрів ПІ-регулятора: $\lambda = 10^5$, $\tau = 30$. Після збудження АМ, у 0,2 с починається пуск до сталої швидкості, яка становить 90 % від синхронної (АМ має три пари полюсів). У 0,5 с прикладається номінальне навантаження, а в 0,7 с навантаження знімається. В момент часу 0,9 с починається гальмування до швидкості обертання, яка дорівнює 35 % від синхронної. За відсутності моменту навантаження, коли активна складова струму статора дорівнює нулю, виконується умова асимптотичної збіжності: $\hat{\omega}_r \rightarrow \omega_r$ з $t \rightarrow \infty$. Якщо АМ працює під навантаженням, то присутня незначна статична помилка оцінки швидкості, тобто $\Delta\omega_r = \hat{\omega}_r - \omega_r \neq 0$, якщо $t \rightarrow \infty$, де $\Delta\omega_r = 0,16\%$ від синхронної швидкості за номінального навантаження на валу АМ.

Висновки

Розв'язана задача параметричного синтезу спостерігача швидкості обертання ротора АМ з відомою структурою, яка складається в представленні функції адаптації як векторного добутку векторів поточкозчеплення ротора і помилки визначення струму статора. Спочатку проаналізовано вплив інтегральної складової в алгоритмі керування на стійкість спостерігача. Для цього отримано характеристичне рівняння лінеаризованої системи рівнянь динаміки спостерігача і знайдено залежності дійсних частин коренів цього рівняння від величини коефіцієнта підсилення інтегратора. Виявлено, що система нейтрально стійка і виявлені асимптоти коренів спостерігача. Знайдено аналітичні вирази рівнянь цих асимптот. Визначено нижню границю значення інтегральної складової, вище якої дійсні частини коренів характеристичного рівняння практично збігаються з асимптотами. Потім отримано характеристичне рівняння лінеаризованої системи рівнянь динаміки спостерігача швидкості обертання з урахування пропорційної складової регулятора в його складі. На підставі алгебраїчного критерію стійкості виведено аналітичне співвідношення між параметрами регулятора, що дозволило в площині цих параметрів визначити області стійкості спостерігача для різних значень швидкості обертання. В результаті аналізу умов стійкості сформовані рекомендації з вибору параметрів ПІ-регулятора в складі спостерігача швидкості обертання. Адекватність запропонованого підходу, який полягає в заміні вихідної нелінійної системи рівнянь динаміки лінеаризованою, з подальшим аналізом цієї лінеаризованої системи, і перенесенні отриманих результатів на властивості вихідної нелінійної системи, перевірена методом математичного моделювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] О. В. Ключев, О. В. Садовой, і Ю. В. Сохіна, «Спостерігач швидкості обертання і поточкозчеплення ротора в системі векторного керування асинхронним електроприводом», *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*, Кам'янське, вип. 2 (41), с. 89-97, 2022. <https://doi.org/10.31319/2519-2884.41.2022.10>.
- [2] Jie You, Wencen Wu, and Yebin Wang, "An Adaptive Luenberger Observer for Speed-Sensorless Estimation of Induction Machines," *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, pp. 307-312, 2018. <https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8431006>.
- [3] Zbigniew Krzeminski, Arkadiusz Lewicki, and Marcin Morawiec, "Speed observer based on extended model of induction machine," *2010 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 3107-3112, 2010. <https://doi.org/10.1109/ISIE.2010.5637685>
- [4] Daniel Wachowiak, "A Universal Gains Selection Method for Speed Observers of Induction Machine," *Energies* 2021,

no. 14(20), 2021. <https://doi.org/10.3390/en14206790>.

[5] Marko Hinkkanen, Lennart Harnefors, and Jorma Luomi, "Reduced-Order Flux Observers with Stator-Resistance Adaptation for Speed-Sensorless Induction Motor Drives," *2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, 2009. <https://doi.org/10.1109/ECCE.2009.5316367>.

[6] K. Hassan Khalil, G. Elias Strangas, and Sinisa Jurkovic, "Speed Observer and Reduced Nonlinear Model for Sensorless Control of Induction Motors," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, is. 2, pp. 327-339, 2009. <https://doi.org/10.1109/TCST.2008.2000977>.

Рекомендована кафедрою системного аналізу та інформаційних технологій ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 11.12.2025

Клюєв Олег Володимирович — канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри електротехніки та електромеханіки, e-mail: Kluev2006@ukr.net ;

Садовой Олександр Валентинович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри електротехніки та електромеханіки, e-mail: sadovoyav@ukr.net ;

Сохіна Юлія Віталіївна — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електротехніки та електромеханіки, e-mail: jvsokhina@gmail.com .

Дніпровський державний технічний університет, Кам'янське

O. V. Kliuiev¹
O. V. Sadovoi¹
Yu. V. Sokhina¹

Determination of the Adaptation Function Parameters of the Observer of Electric Drive Rotation Speed

¹Dniprovsk State Technical University

Several well-known structures of speed observers have been developed using Lyapunov's direct method, which defines the observer structure but does not provide a way to determine the PI-controller parameters included in it. For one of such observers, the structure of which is defined by the adaptation function as the vector product of the rotor flux linkage and the estimation error of the stator current, this paper addresses the problem of parametric synthesis by employing the results of the stability analysis of the linearized models of the output nonlinear observer. First, the observer containing only the integral component was analyzed, and it was proved that the system is neutrally stable for any large positive gains of the integral component. It was revealed that, in addition to a zero root, the observer has asymptotes for the real parts of other roots of the characteristic equation of the linearized system. Analytical expressions were obtained for determining the limiting values of the roots in terms of the observer equation parameters. Then, a proportional component of the controller from the adaptation function was added, and for this observer a characteristic equation of its linearized model was also derived. Using the Hurwitz algebraic stability criterion, analytical relationships between the values of the controller components were obtained at which the observer remains neutrally stable. These relationships made it possible to construct the stability boundaries of the observer in the parameter plane for different values of the rotor rotation speed of the induction machine (IM). The stability analysis resulted in determining appropriate parameter limits for the controller within the observer: lower boundary for the integral component and an upper boundary for the proportional component. The obtained properties of the local stability of first-approximation were then generalized for the output system of the observer nonlinear equations. The applicability of this approach to the given dynamical system was verified by mathematical modeling.

Keywords: speed observer, linearized system, characteristic equation, limiting eigenvalues, neutrally stable system.

Kliuiev Oleh V. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Head of the Chair of Electrical Engineering and Electromechanics, e-mail: Kluev2006@ukr.net ;

Sadovoi Oleksandr V. — Dr Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Electrical Engineering and Electromechanics, e-mail: sadovoyav@ukr.net ;

Sokhina Yuliia V. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Electrical Engineering and Electromechanics, e-mail: jvsokhina@gmail.com