ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

https://doi.org/10.31649/1997-9266-2026-184-1-98-107

УДК 004.9:[517.938:681.5.015](045)

О. О. Войцеховська[1]
Б. І. Мокін[1]
О. Б. Мокін[1]

ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ФУР'Є-ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

[1]Вінницький національний технічний університет

Розроблено інформаційну технологію реалізації Фур'є-інтегрального методу ідентифікації динамічних систем з використанням інформації про їхні вхідний та вихідний сигнали, створеного у 80 роках минулого сторіччя Б. І. Мокіним та узагальненого О. Б Мокіним. Основу розробленої інформаційної технології становить комп'ютерна програма, створену на мові Python. Перша частина цієї Python-програми, реалізуючи перший етап запропонованої інформаційної технології ідентифікації динамічних систем, розкладає експериментально отримані вхідний та вихідний сигнали динамічної системи у зрізанні ряду Фур'є. Друга частина цієї Python-програми формує математичні моделі дійсної та уявної частотних характеристик динамічної системи, що ідентифікується, з використанням апріорі заданої її передаточної функції, вибраної із множини цих функцій, заданих символьно з наростанням кількості символів. Третя частина цієї Python-програми обчислює масиви значень дійсної та уявної частотних характеристик динамічної системи, що ідентифікується, з використанням коефіцієнтів Фур'є, розрахованих у першій частині програми, та розрахункових співвідношень Фур'є-інтегрального методу ідентифікації. Четверта частина цієї Python-програми, використовуючи в якості критерія оптимізації суму квадратів відхилень значень дійсної частотної характеристики динамічної системи, обчислених за співвідношеннями Фур'є-інтегрального методу ідентифікації, від значень цієї ж характеристики, обчислених з використанням її математичної моделі, за допомогою метода найменших квадратів визначає оптимальні за вибраним критерієм значення параметрів апріорі заданої передаточної функції. П'ята частина цієї Python-програми, використовуючи в якості критерія суму квадратів відхилень значень уявної частотної характеристики динамічної системи, обчислених за співвідношеннями Фур'є-інтегрального методу ідентифікації, від значень цієї ж характеристики, обчислених з використанням її математичної моделі, визначає похибку ідентифікації параметрів апріорі заданої передаточної функції. На наступному етапі реалізації запропонованої інформаційної технології із множини передаточних функцій, заданих символьно, вибирається наступна апріорі задана передаточна функція, і процес її ідентифікації з використанням розробленої Python-програми повторюється, починаючи з її другої частини. І цей процес повторюється до тих пір, поки зменшується похибка ідентифікації, і завершується на етапі, на якому похибка ідентифікації починає збільшуватись. Оптимальною математичною моделлю динамічної системи оголошується передаточна функція, параметри якої обчислені на попередньому етапі реалізації даної інформаційної технології, причому ця математична модель буде оптимальною не лише за параметрами, але і за структурою.

Ключові слова: динамічна система, передаточна функція, дійсна та уявна частотні характеристики, Фур'є-інтегральний метод ідентифікації, інформаційна технологія, комп'ютерна програма, Python.

Вихідні передумови та постановка задачі

В попередній нашій публікації [1] ми виклали історію створення та опублікування основних розрахункових співвідношень методу ідентифікації динамічних систем та їхніх вхідних сигналів, названого його автором Б. І. Мокіним «Фур'є-інтегральним методом ідентифікації» (ФІМІ), і синтезували інформаційну технологію (ІТ) реалізації ФІМІ в задачі відновлення вхідних сигналів інформаційно-вимірювальних систем (ІВС) за їхніми вихідними сигналами з використанням створеної нами комп'ютерної програми на мові Python.

Але, як уже зазначено в роботі [1], «незважаючи на те, що розрахункові співвідношення і алгоритми реалізації ФІМІ у 1990 році представлені в монографії [2], доповнені О. Б. Мокіним в роботі [3], а в 2010 році уже увійшли і в навчальний посібник з грифом міністерства [4], широкого застосування в практиці досліджень цей метод не набув», внаслідок небажання дослідників в задачах ідентифікації створювати власні інформаційні технології реалізації ФІМІ під свої задачі.

Але оскільки, як буде продемонстровано нижче, ідентифікація лінійних динамічних систем за допомогою ФІМІ дозволяє синтезувати математичні моделі цього класу систем не лише оптимальні за параметрами, але і оптимальні за структурою, чого не можна досягти іншими відомими методами, то ми вирішили «оживити» ФІМІ шляхом створення ІТ його реалізації з використанням комп'ютерної програми, розробленої на мові Python [5]. А для тих дослідників, які недостатньо володіють програмуванням на мові Python, можемо порекомендувати наші навчальні посібники [6]—[8], в яких є достатньо інформації і про Python і про його застосування для реалізації алгоритмів розв'язання конкретних задач.

Вихідні передумови для створення комп'ютерної програми, яка є базовою в ІТ реалізації ФІМІ в задачі ідентифікації лінійних динамічних систем, як і в нашій попередній роботі [1], візьмемо з нашої роботи [4], доповнивши їх тими математичними співвідношеннями ФІМІ, які не приводились у попередній роботі, оскільки були непотрібними для досягнення мети, визначеної у цій попередній роботі.

Отже почнемо викладення вихідних умов ФІМІ з нагадування про те, що для лінійних динамічних систем, як це показано в підручниках з теоретичних основ електротехніки та теорії автоматичного керування, справедливим є інтегральне рівняння згортки

$$y(t)=\int_0^{\infty} x(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

в якому $x(t)$ — сигнал який діє на вході лінійної динамічної системи з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$, а $y(t)$ — реакція системи на цей вхідний сигнал.

Якщо моделі сигналів подати у вигляді рядів Фур'є з тим самим спектром частот, то, як ми уже зазначали в роботах [1], [4], кожну гармонічну складову сигналу $x(t)$ можна однозначно пов'язати із гармонічною складовою тієї ж частоти сигналу $y(t)$ алгебраїчним виразом, який містить у собі тільки коефіцієнти Фур'є сигналів $x(t)$, $y(t)$ та спектральні складові амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ) $W(j\omega)$ системи на цій же частоті.

Нагадаємо, якщо відрізок часу спостереження вхідного та вихідного сигналів $x(t), y(t)$ дорівнює T, тоді, як відомо з курсу математичного аналізу, ці сигнали можна подати на цьому відрізку у вигляді рядів Фур'є

$$y(t)=\frac{m_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} m_i\cos i\,\omega_1 t+\sum_{i=1}^{\infty} n_i\sin i\,\omega_1 t\,; \tag{2}$$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} a_i\cos i\,\omega_1 t+\sum_{i=1}^{\infty} b_i\sin i\,\omega_1 t\,, \tag{3}$$

в яких $m_i, i=\overline{0,\infty};$ $n_i, i=\overline{1,\infty};$ $a_i, i=\overline{0,\infty};$ $b_i, i=\overline{1,\infty}$ — коефіцієнти Фур'є сигналів $x(t)$, $y(t)$, які знаходяться за відомими з курсу математичного аналізу формулами

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ m_i \end{Bmatrix}=\frac{2}{T}\int_0^T \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}\cos i\,\omega_1 t\,dt, \quad i=0,1,2,\ldots; \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix} b_i \\ n_i \end{Bmatrix}=\frac{2}{T}\int_0^T \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}\sin i\omega_1 t\,dt, \quad i=1,2,\ldots, \tag{5}$$

де $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$ — частота першої гармоніки.

Підставляючи ряди (2), (3) в інтеграл згортки (1), після низки перетворень отримаємо вираз

$$\begin{gathered}\frac{m_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\,\omega_1 t+\sum_{i=1}^{\infty} n_i \sin i\,\omega_1 t= \\ =\frac{a_0}{2} R(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i \cdot R\left(i\,\omega_1\right)+b_i \cdot Q\left(i\,\omega_1\right)\right) \cos i\omega_1 t+\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i \cdot R\left(i\,\omega_1\right)-a_i \cdot Q\left(i\,\omega_1\right)\right) \sin i\,\omega_1 t,\end{gathered} \tag{6}$$

де $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$ — значення, відповідно, дійсної $R(\omega)$ та уявної $Q(\omega)$ частотних характеристик динамічної системи на частотах $i\omega_1$, $i=0,1,2,\ldots$, що пов’язані з її передаточною функцією $W(p)$ та АФЧХ $W(j\omega)$ відомими співвідношеннями

$$W(j\omega)=W(p)_{p=j\omega};\ W(j\omega)=R(\omega)+jQ(\omega). \tag{7}$$

Оскільки вираз (6) — це тотожність, то справедливим є, по-перше, рівняння

$$a_0 R(0)=m_0 \tag{8}$$

для постійних складових a_0, m_0 сигналів $x(t)$, $y(t)$, а, по-друге, справедливою є система рівнянь

$$\begin{cases} a_i R\left(i\,\omega_1\right)+b_i Q\left(i\,\omega_1\right)=m_i, \\ b_i R\left(i\,\omega_1\right)-a_i Q\left(i\,\omega_1\right)=n_i,\end{cases} \tag{9}$$

де $i=1,2,\ldots$ для всіх інших коефіцієнтів Фур’є a_i, b_i, m_i, n_i сигналів $x(t)$, $y(t)$.

Оскільки з теорії рядів Фур’є та властивостей уявної частотної характеристики $Q(\omega)$ відомо, що

$$\begin{cases} b_0=0, \\ Q(0)=0,\end{cases} \tag{10}$$

то рівняння (8) теж можна отримати з системи (9), якщо $i=0$, а тому у подальшому будемо розглядати лише систему рівнянь (9), взявши в ній $i=0,1,2,\ldots$.

Розв’язуючи систему рівнянь (9) відносно $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$, отримаємо

$$R\left(i\,\omega_1\right)=\frac{a_i m_i+b_i n_i}{a_i^2+b_i^2}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ldots; \tag{11}$$

$$Q\left(i\,\omega_1\right)=\frac{b_i m_i-a_i n_i}{a_i^2+b_i^2}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ldots. \tag{12}$$

З отриманням формул (11), (12) закінчується перший етап побудови алгоритму параметричної ідентифікації динамічної системи за допомогою ФІМІ.

Як показано в нашій роботі [4], на другому етапі побудови алгоритму ФІМІ будемо шукати математичну модель системи, дійсна $R(\omega)$ та уявна $Q(\omega)$ частотні характеристики якої в окремих точках визначаються співвідношеннями (11), (12) у класі передаточних функцій виду

$$W_{ls}(p)=\frac{\sum_{r=0}^{l} h_r p^r}{\sum_{k=0}^{s} q_k p^k}, \tag{13}$$

де h_r, q_k — параметри, числові значення яких потребують визначення у процесі ідентифікації. Нагадаємо відоме з теорії автоматичного керування співвідношення, що для динамічних систем, які можна фізично реалізувати, завжди

$$l \leq s. \tag{14}$$

Критеріальне співвідношення

$$\sum\nolimits_{ls}^{R}=\sum_{i=0}^{N}\left(R\left(i\,\omega_1\right)-R_{ls}\left(i\,\omega_1\right)\right)^2 \tag{15}$$

будемо використовувати для пошуку оптимальних числових значень параметрів h_r, q_k передаточних функцій $W_{ls}(p)$ вибраної структури, тобто, за заданих значень l і s, а критеріальне співвідношення

$$\sum_{ls}^{Q} = \sum_{i=0}^{N}\left(Q\left(i\omega_1\right) - Q_{ls}\left(i\omega_1\right)\right)^2 \tag{16}$$

— для оптимізації процесу вибору структури цієї передаточної функції, тобто, для визначення оптимальних значень l і s.

У критеріальних співвідношеннях (15), (16) $R_{ls}\left(i\omega_1\right)$, $Q_{ls}\left(i\omega_1\right)$ — функціонально задані, зважаючи на вибрану структуру передаточної функції $W_{ls}(p)$, у точках $i\omega_1$ $\left(i = 0, 1, 2, \ldots\right)$ вирази для дійсної $R_{ls}(\omega)$ і уявної $Q_{ls}(\omega)$ частотних характеристик об'єкта, що ідентифікується, для отримання яких варто використати відомі з теорії автоматичного керування співвідношення

$$\begin{cases} R_{ls}(\omega) = \operatorname{Re} W_{ls}(p)\big|_{p=j\omega}, \\ Q_{ls}(\omega) = \operatorname{Im} W_{ls}(p)\big|_{p=j\omega}, \end{cases} \tag{17}$$

а $R\left(i\omega_1\right)$, $Q\left(i\omega_1\right)$ — розв'язки рівнянь (11), (12).

Використовуються співвідношення (11)—(17) у процесі параметричної ідентифікації динамічної системи у такій послідовності: задаючись у виразі (13) різними конкретними значеннями l і s так, щоб виконувалась умова фізичної реалізованості (14), для кожної конкретної пари значень l і s за співвідношеннями (17) визначаємо функції $R_{ls}(\omega)$ та $Q_{ls}(\omega)$. У результаті цієї операції отримуємо множину пар частотних характеристик

$$\begin{aligned} &R_{01}(\omega), Q_{01}(\omega);\quad R_{11}(\omega), Q_{11}(\omega); \\ &R_{02}(\omega), Q_{02}(\omega);\quad R_{12}(\omega), Q_{12}(\omega);\quad R_{22}(\omega), Q_{22}(\omega); \\ &R_{03}(\omega), Q_{03}(\omega);\quad R_{13}(\omega), Q_{13}(\omega);\quad \ldots\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Підставивши по черзі функції $R_{01}(\omega)$, $R_{11}(\omega)$, $R_{02}(\omega)$, $R_{12}(\omega)$, $\ldots$ з множини (18), задані у точках $i\omega_1$, разом зі значеннями $R\left(i\omega_1\right)$, взятими з виразу (11), у критеріальне співвідношення (15), і здійснивши з використанням критерію (15) стандартну процедуру методу найменших квадратів, визначимо оптимальні за критерієм мінімуму суми квадратів відхилень оцінки коефіцієнтів h_r, q_k передаточних функцій виду (13) для кожної конкретної пари значень l і s із наперед заданого діапазону.

Для того, щоб оптимізувати структуру передаточної функції $W_{ls}(p)$ системи, що ідентифікується, підставимо найдені з використанням функції $R_{ls}(\omega)$ за допомогою методу найменших квадратів числові значення коефіцієнтів h_r, q_k у відповідні вирази для $Q_{ls}(\omega)$ із множини пар (18).

Конкретизовані у такий спосіб функції $Q_{ls}(\omega)$, у свою чергу, підставимо у друге критеріальне співвідношення (16). Після підстановки у вираз (16) також і значень $Q\left(i\omega_1\right)$, отриманих із виразу (12), і прямих обчислень значень $\sum_{ls}^{Q}$ побудуємо числовий ряд

$$\sum_{01}^{Q},\ \sum_{11}^{Q},\ \sum_{02}^{Q},\ \sum_{12}^{Q},\ \sum_{22}^{Q},\ \ldots. \tag{19}$$

Враховуючи основну ідею методу найменших квадратів, можна стверджувати, що та пара характеристик $R_{ls}(\omega)$, $Q_{ls}(\omega)$, яка задає найменший член

$$\sum_{ls}^{Q} = \min_{ls} \tag{20}$$

ряду (19), і визначає оптимальну структуру математичної моделі динамічної системи, що ідентифікується.

Розв'язання поставленої задачі

Як бачимо, з вихідних умов, розв'язання задачі ідентифікації лінійної динамічної системи з використанням ФІМІ потрібно починати з експериментального визначення її вхідного $x(t)$ та вихідного $y(t)$ сигналів.

Для створення можливості дати оцінку отриманим результатам розв'язання поставленої задачі конкретизуємо ці сигнали.

Отже, припустимо, що на вхід системи ми подали сигнал

$$x(t)=t, \tag{21}$$

який викликав на виході цієї динамічної системи реакцію у вигляді сигналу

$$y(t)=\frac{t}{3}-\frac{1}{36}-2\exp\frac{-3t}{9}+\exp\frac{-4t}{4}. \tag{22}$$

Припустимо також, що ми мали можливість зафіксувати ці сигнали на відрізку часу

$$T=10\,(\text{одиниць часу}). \tag{23}$$

Саме на цьому відрізку часу ми будемо у нашій Python-програмі, використовуючи вирази (4), (5), розкладати сигнали, задані математичними моделями (21), (22), в ряди Фур'є (2), (3).

А далі, згідно з алгоритмом ФІМІ, нам потрібно шляхом конкретизації параметрів $l,\ s$ у виразі (13) задати множину передаточних функцій, що матиме вигляд

$$\{W_{ls}(p)\}=\left\{\frac{\sum_{r=0}^{l}h_r p^r}{\sum_{k=0}^{s}q_k p^k}\right\},\ l=0,1,2,...;\ s=1,2,... \tag{24}$$

на якій ми і будемо здійснювати пошук оптимальної структури та оптимальних значень параметрів динамічної системи, використовуючи критеріальні співвідношення (15), (16). Для прикладу із цієї множини матимемо:

$$W_{01}(p)=\frac{h_0}{q_1p+q_0}; \tag{25}$$

$$W_{02}(p)=\frac{h_0}{q_2p^2+q_1p+q_0}; \tag{26}$$

$$W_{12}(p)=\frac{h_1p+h_0}{q_2p^2+q_1p+q_0}; \tag{27}$$

$$W_{03}(p)=\frac{h_0}{q_3p^3+q_2p^2+q_1p+q_0}. \tag{28}$$

А оскільки для реалізації критеріальних співвідношень (15), (16) нам необхідно знати число складових в кожному з них, то вважатимемо, що

$$N=10. \tag{29}$$

Тепер ми маємо достатньо інформації для створення Python-програми реалізації ФІМІ в задачі ідентифікації лінійної динамічної системи, яка матиме такий вигляд:

```
In [1]: import sympy
In [2]: from sympy import*
In [3]: t,v,T,v0=symbols('t v T v0')
In [4]: x=Function('x')(t)
In [5]: y=Function('y')(t)
In [6]: T=10
In [7]: v0=(2*pi/T).evalf(3);v0
Out[7]: 0.628
In [8]: f=Function('f')(v,t)
In [9]: g=Function('g')(v,t)
```

```
In [10]: x=t
In [11]: y=t/3-1/36-2*exp(-3*t)/9+\
              exp(-4*t)/4
In [12]: f=cos(v*t)
In [13]: g=sin(v*t)
In [14]: a,b,m,n=symbols('a b m n')
In [15]: f_expr=f
In [16]: g_expr=g
In [17]: aa=[]
In [18]: bb=[]
In [19]: mm=[]
In [20]: nn=[]
In [21]: for k in range(10):
              f_k_t_expr=f_expr.subs(v,k*v0)
              g_k_t_expr=g_expr.subs(v,k*v0)
              a=((2/T)*integrate(x*f_k_t_expr, (t,0,T))).evalf(3)
              aa.append(a)
              b=((2/T)*integrate(x*g_k_t_expr, (t,0,T))).evalf(3)
              bb.append(b)
              m=((2/T)*integrate(y*f_k_t_expr, (t,0,T))).evalf(3)
              mm.append(m)
              n=((2/T)*integrate(y*g_k_t_expr, (t,0,T))).evalf(3)
              nn.append(n)
In [22]: print(aa,end="")
         [10.0, 9.77e-5, 4.88e-5, -0.00201, 5.49e-5, -0.00119, -0.00202,
         0.000944, 5.65e-5, -0.000634]
In [23]: print(bb,end="")
         [0, -3.18, -1.59, -1.06, -0.796, -0.637, -0.531, -0.455, -0.398, -0.354]
In [24]: print(mm,end="")
         [3.28, -0.00197, -0.00121, -0.00106, 0.000275, 0.000274,
          0.000209, 0.00127, 0.000974, 0.000705]
In [25]: print(nn,end="")
         [0, -1.06, -0.532, -0.356, -0.267, -0.214, -0.178, -0.152, -0.133, -0.118]
In [26]: R,Q=symbols('R Q')
In [27]: RR=[]
In [28]: QQ=[]
In [29]: for i in range(10):
              R=(aa[i]*mm[i]+bb[i]*nn[i])\
               /(aa[i]**2+bb[i]**2)
               RR.append(R)
              Q=(bb[i]*mm[i]-aa[i]*nn[i])\
               /(aa[i]**2+bb[i]**2)
              QQ.append(Q)
In [30]: print(RR,end="")
[0.328, 0.334, 0.334, 0.335, 0.335, 0.335, 0.335, 0.335, 0.334, 0.334]
In [31]: print(QQ,end="")
[0, 0.000630, 0.000768, 0.000362, -0.000323, -0.00106, -0.00167, -0.00209,
 -0.00240, -0.00259]
In [32]: p=symbols('p')
In [33]: d,v= symbols('d v',real=True)
In [34]: p=d+I*v
In [35]: h0,q0,q1,q2,l=\
              symbols('h0 q0 q1 q2 l')
In [36]: W0=Function ('W0')(p)
In [37]: W0=h0/(q2*p**2+q1*p+q0)
In [38]: W0_expr=W0
In [39]: W01=Function('W01')(v)
```

```
In [40]: W01=W0_expr.subs(p,d+I*v)
In [41]: W01_expr=W01
In [42]: W02=Function('W02')(v)
In [43]: W02=W01_expr.subs(d,0)
In [44]: W02_expr=W02
In [45]: W03=Function('W03')(l*v0)
In [46]: W03=W02_expr.subs(v,l*v0)
In [47]: reW03=Function('reW03')(l)
In [48]: reW03=h0*(q0-q2*0.395*l**2)/((q0- q2*0.395*l**2)**2 +
                   q1**2*0.395*l**2)
In [49]: imW03=Function('imW03')(l)
In [50]: imW03=-h0*q1*l*0.628/((q0-q2*0.395*l**2)**2 +q1**2*0.395*l**2)
In [51]: import numpy as np
In [52]: import scipy
In [53]: from scipy.optimize import curve_fit
In [54]: def model(l,h0,q0,q1,q2):
              return h0*(q0-q2*0.395*l**2)/((q0-q2*0.395*l**2)**2 +
                   q1**2*0.395*l**2)
In [55]: l=np.array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0])
In [56]: z=np.array([0.328, 0.334, 0.334, 0.335, 0.335, 0.335, 0.335,
                   0.335, 0.334, 0.334])
In [57]: initial_guess=[5.0,1.0,1.0,1.0]
In [58]: params=curve_fit(model,l,z,p0=initial_guess)
In [59]: l=symbols('l')
In [60]: imW05=Function('imW05')(l)
In [61]: imW03_expr=imW03
In [62]: imW05=imW03_expr.subs([(h0,params[0][0]), (q0,params[0][1]),
                   (q1,params[0][2]),(q2,params[0][3])]);imW05
Out[62]: -875.881048212718*l/(109.471275391381*l**2+
         63550.4846476906*(1 - 0.00211364870264863*l**2)**2)
In [63]: imW05_expr=imW05
In [64]: immimm=[]
In [65]: for i in range(10):
              imm=imW05_expr.subs(l,i)
              immimm.append(imm)
In [66]: print(immimm)
[0,-0.0138169906489899,-0.0278418424545141,-0.0422852431574811,
-0.0573630176260419,-0.0732972739534991,-0.0903154564301352,
- 0.108645923027600, -0.128508019177661, -0.150093809579595]
In [67]: iiiQQQ=[]
In [68]: for i in range(10):
              iQQ=(immimm[i]-QQ[i])**2
              iiiQQQ.append(iQQ)
In [69]: print(iiiQQQ)
[0,0.000208705815158815,0.000818520009332776,0.00181882114619757,
0.00325359788657950,0.00521877358872012,0.00785841798981578,            0.0113537631024521,
0.0159028915246375, 0.0217563362215432]
In [70]: siiiQQQ=sum(iiiQQQ);siiiQQQ
Out[70]: 0.0681898272844374
In [71]: p=symbols('p')
In [72]: W=Function('W')(p)
In [73]:W=h0/(q2*p**2+q1*p+q0)
In [74]: W=W.subs([(h0,params[0][0]),(q0,params[0][1]), (q1,params[0][2]),
                   (q2,params[0][3])]).evalf(3);W
Out[74]:
83.8/(1.35*p**2 + 16.6*p + 252.0)
```

Кінець програми

Аналізуючи вищеподану Python-програму, бачимо, що:

– командою In [6] ми вводимо в програму відрізок часу T, заданий виразом (23), впродовж якого фіксуються сигнал $x(t)$, що надходить на вхід динамічної системи, ідентифікація якої здійснюється, та сигнал $y(t)$, який є реакцією системи на вхідний сигнал;

– командами In [10], In [11] уводимо в програму сигнал $x(t)$, заданий виразом (21), та сигнал $y(t)$, заданий виразом (22);

– командою In [7] обчислюємо частоту v0 першої гармоніки розкладання в ряди Фур'є сигналів $x(t),\ y(t)$;

– командою In [21] з використанням for-циклу здійснюється обчислення постійної складової і амплітуд a, b, m, n перших 9 Фур'є-гармонік сигналів $x(t),\ y(t)$, які заносяться в списки aa, bb, mm, nn;

– командою In [29] з використанням for-циклу та співвідношень ФІМІ, заданих виразами (11), (12), обчислюються числові значення дійсної R та уявної Q частотних характеристик динамічної системи на тих самих частотах, на яких уже попередньо обчислені амплітуди a, b, m, n перших 9 Фур'є-гармонік сигналів $x(t),\ y(t)$, які заносяться в списки RR,QQ;

– командою In [37] уводимо в програму передаточну функцію динамічної системи, що ідентифікується за ФІМІ, із множини (24) — у нашому випадку вводимо функцію з невідомими параметрами, задану виразом (26), яку

– командами In [38]—In [46] перетворюємо у функцію, аргументом якої стає індекс l;

– командою In [48] уводимо в програму математичну модель дійсної частотної характеристики reW03 динамічної системи, в яку входять усі невідомі параметри передаточної функції (26), а

– командою In [50] уводимо в програму математичну модель уявної частотної характеристики imW03 динамічної системи, в яку теж входять усі невідомі параметри передаточної функції (26);

– командами In [51]—In [58] з використанням нелінійного методу найменших квадратів та критерію (15) обчислюємо оптимальні значення параметрів h0, q0, q1, q2 передаточної функції для вибраної структури (26) динамічної системи, які зберігатимемо у двовимірному списку params ( ) і які уводитимемо в математичну модель уявної частотної характеристики imW03 динамічної системи командою In [62];

– командами In [63]— In [70] з використанням двох for-циклів та оптимальних значень параметрів h0, q0, q1, q2 передаточної функції для вибраної структури (26) динамічної системи здійснюємо обчислення критеріального співвідношення (16), числове значення якого визначить нам один член ряду (19);

– командами In [71]—In [74] здійснюємо заключний етап ідентифікації динамічної системи передаточною функцією зі структурою (26).

А далі, командою In [37] уводимо в програму іншу передаточну функцію динамічної системи, що ідентифікується за ФІМІ, з множини (24), наприклад, вводимо функцію з невідомими параметрами, задану виразом (27), і реалізуємо щодо неї усі подальші команди програми, починаючи з In [38], та отримуємо нове числове значення критеріального співвідношення (16), яке визначає нам наступний член ряду (19). І якщо цей член буде менший попереднього, то процес визначення оптимальних значень параметрів передаточних функцій та їх оптимальної структури продовжуємо, а якщо виконуватиметься критерій (20), то процес зупиняємо і оголошуємо оптимальною передаточною функцією динамічної системи ту, якій відповідатиме цей критерій.

Висновки

Запропоновано інформаційну технологію реалізації Фур'є-інтегрального методу ідентифікації динамічних систем з використанням інформації про їхні вхідний та вихідний сигнали, створеного у 80 роках минулого сторіччя Б. І. Мокіним та узагальненого О. Б. Мокіним.

В основу розробленої інформаційної технології покладено комп'ютерну програму, створену на мові Python, яка складається з 5 частин, перша з яких здійснює розкладання експериментально отриманих вхідного та вихідного сигналів динамічної системи у зрізанні ряду Фур'є, друга формує математичні моделі дійсної та уявної частотних характеристик динамічної системи, що ідентифікується, з використанням апріорі заданої її передаточної функції, вибраної із множини цих функцій, заданих символьно з наростанням кількості символів, третя обчислює масиви значень дійсної та уявної частотних характеристик динамічної системи, що ідентифікується, з використанням коефіцієнтів Фур'є, розрахованих у першій частині програми, та розрахункових співвідношень Фур'є-інтегрального методу ідентифікації, четверта визначає оптимальні за вибраним критерієм значення параметрів апріорі заданої передаточної функції, а п'ята визначає похибку ідентифікації параметрів апріорі заданої передаточної функції. А далі із множини передаточних функцій, заданих символьно, вибирається наступна апріорі задана передаточна функція, і процес її ідентифікації з використанням розробленої Python-програми повторюється, починаючи з її другої частини. І цей процес повторюється до тих пір, поки зменшується похибка ідентифікації, і завершується на етапі, на якому похибка ідентифікації починає збільшуватись, а оптимальною математичною моделлю динамічної системи оголошується передаточна функція, параметри якої обчислені на попередньому етапі реалізації даної інформаційної технології, причому ця математична модель буде оптимальною не лише за параметрами, але і за структурою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] О. О. Войцеховська, Б. І. Мокін, і О. Б. Мокін, «Інформаційна технологія реалізації Фур'є-інтегрального методу ідентифікації для відновлення вхідних сигналів інформаційно-вимірювальних систем,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 3, с. 90-100, 2025. https://doi.org/10.31649/1997-9266-2025-180-3-90-100 .

[2] Jozef Korbicz, and Mokin Borys, *Metody matematyczne w zagadnieniach kontroli I sterowania w energetyci*, monografie. Zielona Gora: Wyzsza Szkola Inzynierska, 1990, 158 s.

[3] B. I. Mokin, and O. B. Mokin, "Renewal of input signals of nonlinear measuring converters by fourier-integral method," Dubrovnik (CROATIA): IMEKO: *Proceedings XVII World Gongress 3rd Millennium*, 2003, pp. 210-216.

[4] Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, і О. Б. Мокін, *Математичні методи ідентифікації динамічних систем*, навч. посіб. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2010, 260 с. ISBN 978-966-641-892-3.

[5] *Python*. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.python.org//downloads/ .

[6] Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, і О. Б. Мокін, *Навчальний посібник для опанування студентами способів розв'язання задач з функціонального аналізу мовою Python*. Частина 1. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2022, 124 с. ISBN 978-966-641-892-3.

[7] Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, і О. Б. Мокін, *Навчальний посібник для опанування студентами способів розв'язання задач з функціонального аналізу мовою Python*. Частина 2. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2023, 144 с. ISBN 978-966-641-926-5.

[8] Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, і О. Б. Мокін, *Методи та засоби комп'ютерних обчислень*, навч. посіб. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2024, 154 с. ISBN 978-966-641-970-8 (друк), ISBN 978-617-8163-29-7 (PDF).

Рекомендована кафедрою системного аналізу та інформаційних технологій ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 3.11.2025

Войцеховська Ольга Олександрівна — д-р філософії, доцент кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: olgav1085@gmail.com ;

Мокін Борис Іванович — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: borys.mokin@gmail.com;

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: abmokin@gmail.com .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

O. O. Voitsekhovska[1]
B. I. Mokin[1]
O. B. Mokin[1]

Information Technology of the Fourier-Integral Method Implementation for Dynamic Systems Identification

[1]Vinnytsia National Technical University

Information technology has been developed for implementing the Fourier integral method of identifying dynamic systems using information about their input and output signals, created in the 1980s by B. I. Mokin and generalized by O. B. Mokin. The developed information technology is based on a computer program created in the Python language. The *first part of this Python program, implementing the first stage of the proposed information technology for identifying dynamic systems, decomposes the experimentally obtained input and output signals of the dynamic system into truncated Fourier series. The second part of this Python program generates mathematical models of the real and imaginary frequency characteristics of the identified dynamic system using its a priori given transfer function, selected from a set of these functions, given symbolically with increasing number of symbols. The third part of this Python program calculates arrays of values of the real and imaginary frequency characteristics of the dynamic system being identified, using the Fourier coefficients calculated in the first part of the program and the calculated relations of the Fourier integral identification method. The fourth part of this Python program uses the sum of squares of deviations of the actual frequency response values of the dynamic system, calculated using the Fourier integral identification method, as the optimization criterion. from the values of the same characteristic calculated using its mathematical model, using the least squares method, determines the optimal values of the parameters of the a priori given transfer function according to the selected criterion. The fifth part of this Python program, using as a criterion the sum of the squares of the deviations of the values of the imaginary frequency response of the dynamic system, calculated using the Fourier integral identification method, from the values of the same characteristic calculated using its mathematical model, determines the error of identification of the parameters of the a priori given transfer function. At the next stage of implementing the proposed information technology, the next a priori specified transfer function is selected from a set of transfer functions specified symbolically, and the process of its identification using the developed Python program is repeated, starting from its second part. This process is repeated until the identification error decreases and ends at the stage where the identification error begins to increase. The transfer function, whose parameters are calculated at the previous stage of implementation of this information technology, is declared to be the optimal mathematical model of the dynamic system, and this mathematical model will be optimal not only in terms of parameters, but also in terms of structure.*

Keywords: dynamic system, transfer function, real and imaginary frequency characteristics, Fourier integral identification method, information technology, computer program, Python.

Voitsekhovska Olha O. — PhD, Associate Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: olgav1085@gmail.com ;

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: abmokin@gmail.com