

**Б. І. Мокін<sup>1</sup>**  
**О. Б. Мокін<sup>1</sup>**  
**Б. В. Пасєка<sup>1</sup>**

## **ЕКВІВАЛЕНТНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ОБЧИСЛЕНЬ В ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОМОБІЛЯ З АСИНХРОННИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ**

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

*З'ясовано, що процедури обчислення параметрів оптимального руху електромобіля дорогою, прокладеною на місцевості зі складним ландшафтом, вимагають здійснення обчислень конкретних значень великої кількості трансцендентних функцій, що за використання методів послідовних наближень приводить до значних втрат часу, необхідних для отримання кінцевих результатів. І оскільки ці результати потрібні водію електромобіля в процесі реалізації оптимального руху, то, використовуючи відомі розрахункові формули, отримані різними дослідниками для оцінки параметрів оптимального руху електромобіля дорогою, прокладеною на місцевості зі складним ландшафтом, через затримки в обчисленнях водій буде не в змозі встигати ухвалювати оптимальні рішення, що будуть отримані за використання класичних розрахунків у моменти часу, коли ситуація на дорозі уже зазнала суттєвих змін. Тож важливою науково-практичною задачею є синтез таких еквівалентних моделей процесів обчислень параметрів оптимального руху електромобіля, за допомогою яких результати цих обчислень надходили б до водія ще в ті моменти часу, в які мала місце дорожня ситуація, що оптимізується. Саме такі еквівалентні моделі процесів обчислень параметрів оптимального руху електромобіля і запропоновані у цій роботі. В цих моделях запропоновано значення трансцендентних функцій, таких, як експоненціальна, синусоїдальна, косинусоїдальна, логарифмічна та радикальна, які є невід'ємними складовими моделей обчислення параметрів оптимального руху електромобіля, обчислювати, використовуючи апроксимацію вказаних трансцендентних функцій обрізаними степеневими рядами, для визначення членів яких використовуються лише основні алгебраїчні операції, такі як додавання, віднімання, множення і ділення, які виконуються комп'ютерами миттєво. Для кожної трансцендентної функції в цій роботі досліджена і визначена кількість членів в обрізаних степеневих рядах, якими ці функції апроксимуються та використання яких забезпечує прийнятну для практичних розрахунків точність результатів, отриманих в реальних умовах руху та у потрібні моменти часу.*

**Ключові слова:** математична модель, оптимізація, електромобіль, обчислення параметрів оптимального руху, трансцендентні складові моделі обчислення параметрів, еквівалентування.

### **Вступ**

В роботах [1], [2], [3] синтезовані математичні моделі оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом, який долає горизонтальні відрізки дороги та спуски і підйоми в умовах як відсутності, так і дії різного роду обмежень.

Ці математичні моделі містять в собі не лише лінійні та нелінійні операції, але і трансцендентні, тож їх використання для моделювання оптимального руху електромобіля можливе лише у сукупності з методом наближеного обчислення параметрів цих моделей. Наприклад, як показано в нашій роботі [1], обчислювальний метод для визначення конкретних значень оптимальної швидкості  $v = \varphi_1(t)$  електромобіля та оптимального струму  $i = \varphi_2(t)$  його приводного електродвигуна зводиться до реалізації співвідношень:

$$v_{k+1} = v_k + \frac{(a^2 + b^2)}{2ab} (\tau_{k+1} - \tau_k) \ln \left( i_k + \sqrt{i_k^2 + 1} \right) - (f_0 + f_1 v_k + f_2 v_k^2) (\tau_{k+1} - \tau_k), \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \tau_0 = 0; v_0 = 0; i_0 = i_n;$$

$$i_k(n) = i_k(n-1) - \frac{C_3}{n} \left( 2a \sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} (1 - 2\alpha i_k(n-1)) - \right. \\ \left. - \frac{a^2 + b^2}{b} \left( C_1^* \exp((f_1 + 2f_2 v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)) - \frac{C_2^*}{f_1 + 2f_2 v_k} \right) \right), \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad |i_N - i_{N-1}| \leq \varepsilon \quad (2)$$

– під час руху горизонтальним відрізком дороги; до реалізації співвідношень:

$$v_{k+1} = v_k + \frac{(a^2 + b^2)}{2ab} (\tau_{k+1} - \tau_k) \ln \left( i_k + \sqrt{i_k^2 + 1} \right) - (-f_0^* \sin \beta_k + f_0 \cos \beta_k + f_1 v_k + f_2 v_k^2) (\tau_{k+1} - \tau_k), \quad (3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \tau_0 = 0; v_0 = 0; i_0 = i_n; \beta_k \in \left[ 0, \beta_{\max} < \frac{\pi}{4} \right];$$

$$i_k(n) = i_k(n-1) - \frac{C_3}{n} \left( 2a \sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} (1 - 2\alpha i_k(n-1)) - \right. \\ \left. - \frac{a^2 + b^2}{b} \left( C_1^* \exp((f_1 + 2f_2 v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)) - \frac{C_2^*}{f_1 + 2f_2 v_k} \right) \right), \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad |i_N - i_{N-1}| \leq \varepsilon \quad (4)$$

– під час руху на спуск та до реалізації співвідношень:

$$v_{k+1} = v_k + \frac{(a^2 + b^2)}{2ab} (\tau_{k+1} - \tau_k) \ln \left( i_k + \sqrt{i_k^2 + 1} \right) - (f_0^* \sin \beta_k + f_0 \cos \beta_k + f_1 v_k + f_2 v_k^2) (\tau_{k+1} - \tau_k), \quad (5)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \tau_0 = 0; v_0 = 0; i_0 = i_n; \beta_k \in \left[ 0, \beta_{\max} < \frac{\pi}{4} \right];$$

$$i_k(n) = i_k(n-1) - \frac{C_3}{n} \left( 2a \sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} (1 - 2\alpha i_k(n-1)) - \right. \\ \left. - \frac{a^2 + b^2}{b} \left( C_1^* \exp((f_1 + 2f_2 v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)) - \frac{C_2^*}{f_1 + 2f_2 v_k} \right) \right), \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad |i_N - i_{N-1}| \leq \varepsilon \quad (6)$$

– під час руху на підйом .

Аналізуючи вирази (1)—(6), бачимо, що для їх реалізації за багатоетапного процесу наближень за програмою, встановленою у бортовому комп'ютері, знадобиться часу більше ніж той максимальний його відрізок, за який водій електромобіля зобов'язаний прийняти рішення і почати його реалізацію в процесі керування рухом цього електромобіля.

А тому постає задача синтезувати такі еквівалентні математичні моделі процесів обчислень за виразами (1)—(6), які не містили б в собі трансцендентних функцій, а зводились до найпростіших алгебраїчних операцій, які реалізуються бортовим комп'ютером практично миттєво, але водночас щоб обчислення параметрів оптимального руху електромобіля за цими еквівалентними моделями здійснювались з похибками, що не перевищуватимуть їх допустимий рівень..

Саме розв'язання такої задачі і здійснюється у цій статті.

### Обґрунтування ідеї еквівалентування моделей процесу обчислень

Розв'язання поставленої задачі почнемо з того, що, як показано в розділі, присвяченому степеневим рядам у будь-якому підручнику з математичного аналізу, справедливими є такі співвідношення:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (7)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad (8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad (9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots; \quad (10)$$

$$\sqrt{x^2+1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots, \quad (11)$$

які зв'язують експоненціальну, синусоїдальну, косинусоїдальну, логарифмічну та радикальну трансцендентні функції зі степеневими рядами.

Порівнюючи співвідношення (1)—(6) зі співвідношеннями (7)—(11), бачимо, що усі ці трансцендентні функції є структурними складовими і у математичних моделях процесів обчислення параметрів моделей оптимального руху електромобіля.

А як відомо з підручників з обчислювальної математики та програмування, на обчислення значень трансцендентних функцій в комп'ютерних програмах, створених на будь-якій мові програмування, часу потрібно на кілька порядків більше ніж на обчисленнях в таких алгебраїчних операціях, як додавання, віднімання, множення, ділення та підняття до степеня, що входять до структури обрізаних степеневих рядів.

Особливо ця економія часу на обчисленнях проявлятиметься в моделях наближених обчислень струму асинхронного приводного електродвигуна, які визначаються співвідношеннями (2), (4), (6), якщо в них експоненціальну функцію апроксимувати обрізаним степеневим рядом, структурно подібним до правої частини виразу (7), а радикальну функцію апроксимувати обрізаним степеневим рядом, структурно подібним до правої частини виразу (11).

Аналізуючи співвідношення (1), (3), (5), бачимо, що і для обчислень швидкості оптимального руху електромобіля матимемо економію часу, якщо в них синусоїдальну, косинусоїдальну та логарифмічну функції апроксимуватимемо обрізаними степеневими рядами, структурно подібними до правих частин виразів (8), (9), (10).

Тож, підставляючи апроксимовані обрізаними степеневими рядами експоненціальну, синусоїдальну, косинусоїдальну, логарифмічну та радикальну функції у співвідношення (1)—(6), ми і отримаємо еквівалентні моделі обчислень струму приводного асинхронного електродвигуна та швидкості електромобіля під час його руху в оптимальному режимі.

Але перш ніж підставляти обрізані степеневі ряди у співвідношення (1)—(6) для отримання еквівалентних моделей обчислень, здійснимо оцінку точності обчислень, обумовлених апроксимацією експоненціальної, синусоїдальної, косинусоїдальної, логарифмічної та радикальної функцій обрізаними степеневими рядами зі структурою, заданою виразами (7)—(11), в діапазоні числових значень їхніх аргументів, характерних для руху електромобіля дорогою зі складним профілем. Завдяки цим оцінкам ми визначимо, скільки членів в обрізаних степеневих рядах, що стоять в правих частинах виразів (7)—(11), необхідно враховувати у разі їх підстановок в еквівалентні моделі обчислень виразів (1)—(6).

#### **Аналіз точності відтворення експоненціальної, синусоїдальної, косинусоїдальної, логарифмічної та радикальної функцій обрізаними степеневими рядами**

Для порівняння точності відтворення експоненціальної, синусоїдальної та косинусоїдальної функцій правими частинами виразів (7)—(10) з різною кількістю членів використаємо короткі програми, створені з використанням мови Python [4], які закінчуватимуться побудовою графіків, з яких буде чітко видно в якому діапазоні значень незалежних змінних ці трансцендентні функції апроксимуються з достатньою для практичних розрахунків точністю.

Почнемо з порівняння варіантів відтворення експоненціальної функції (7), використовуючи програму № 1.

*Програма № 1:*

```
In [1]: import numpy as np
In [2]: import matplotlib.pyplot as mpl
In [3]: def f1(x):
        return np.exp(x)
In [4]: def f11(x):
        return 1+x
In [5]: def f12(x):
        return 1+x+x**2/2
In [6]: x=np.linspace(0,1,21)
In [7]: g1=f1(x)
In [8]: g11=f11(x)
```

```
In [9]: g12=f12(x)
In [10]: fig=mpl.figure(facecolor='white')
        <Figure size 864x576 with 0 Axes>
In [11]: mpl.plot(x,g1,'-r',x,g11,'--g',x,g12,'-
        .b',linewidth=3)
Out[11]:
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x24e35c42fd0>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x24e35ddead0>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x24e35ddec10>]
Important
```

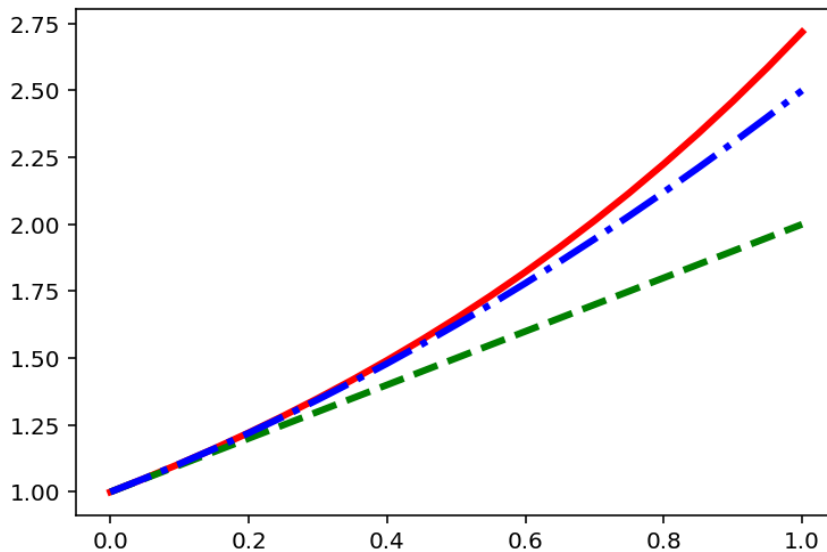


Рис. 1. Графік експоненціальної функції  $g1 = e^x$  (неперервна лінія) на відрізку значень незалежної змінної  $x \in [0, 1]$  та її відтворення двома членами степеневого ряду  $g11 = 1 + x$  (штрихова) та трьома членами цього ряду  $g12 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$  (штрихпунктирна)

Аналізуючи графіки, показані на рис. 1, бачимо, що експоненту на відрізку значень  $x \in [0, 0,2]$  достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати прямою, а на відрізку значень  $x \in [0, 0,5]$  параболою.

А далі, використовуючи команди цієї ж програми № 1, порівняємо варіанти відтворення синусоїдальної функції (8).

*Продовження програми № 1:*

```
In [12]: def f2(x):
        return np.sin(x)
In [13]: def f21(x):
        return x-x**3/6
In [14]: def f22(x):
        return x-x**3/6+x**5/120
In [15]: g2=f2(x)
In [16]: g21=f21(x)
In [17]: g22=f22(x)
```

```
In [18]: fig=mpl.figure(facecolor='white')
        <Figure size 864x576 with 0 Axes>
In [19]: mpl.plot(x,g2,'-r',x,g21,'--g',x,g22,'-
        .b',linewidth=3)
Out[19]:
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36af7890>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36af79d0>,
 <matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36af7b10>]
Important
```

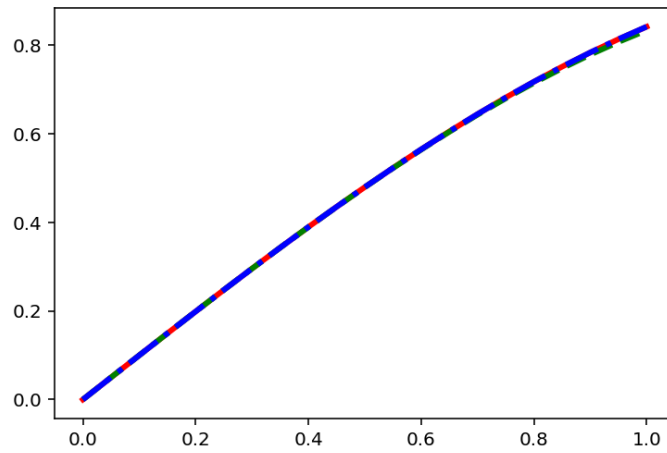


Рис. 2. Графік синусоїдальної функції  $g_2 = \sin(x)$  (неперервна лінія) на відрізку значень незалежної змінної  $x \in [0, 1]$  та її відтворення двома членами степеневого ряду  $g_{21} = x - \frac{1}{6}x^3$  (штрихова) та трьома членами  $g_{22} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$  (штрихпунктирна)

Аналізуючи графіки, показані на рис. 2, бачимо, що синусоїду на відрізку значень  $x \in [0, 1]$  з достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати кубічною параболою.

Ну а далі, використовуючи наступні команди цієї ж програми № 1, порівняємо варіанти відтворення косинусоїдальної функції (9).

*Продовження програми № 1:*

In [20]: def f3(x):

return np.cos(x)

In [21]: def f31(x):

return 1-x\*\*2/2

In [22]: def f32(x):

return 1-x\*\*2/2+x\*\*4/24

In [23]: g3=f3(x)

In [24]: g31=f31(x)

In [25]: g32=f32(x)

In [26]: fig=mpl.figure(facecolor='white')

<Figure size 864x576 with 0 Axes>

In [27]: mpl.plot(x,g3,'-r',x,g31,'--g',x,g32,'-.b',linewidth=3)

Out[27]:

[<matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36f5b890>,

<matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36f5b9d0>,

<matplotlib.lines.Line2D at 0x24e36f5bb10>]

Important

Аналізуючи графіки, показані на рис. 3, бачимо, що косинусоїду на відрізку значень  $x \in [0, 0,7]$  з достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати параболою, але якщо  $x > 0,7$ , то виникає необхідність у врахуванні і третього члена степеневого ряду, в якому незалежна змінна піднімається до 4-го степеня.

А далі звертаємо увагу на те, що використовуємо логарифмічну функцію у вигляді (10) для апроксимації логарифмічної функції зі структурою

$$y = \ln \left( x + (x^2 + 1)^{0,5} \right), \quad (12)$$

яка є у виразах (1), (3), (5), без суттєвих втрат у точності її апроксимації обрізаним степеневим рядом, приведеним у правій частині виразу (10), за межами відрізка  $x \in [0, 0,2]$  не має сенсу, а є сенс представити обрізаним степеневим рядом саме функцію (12), що ми і реалізуємо, використавши програму № 2.

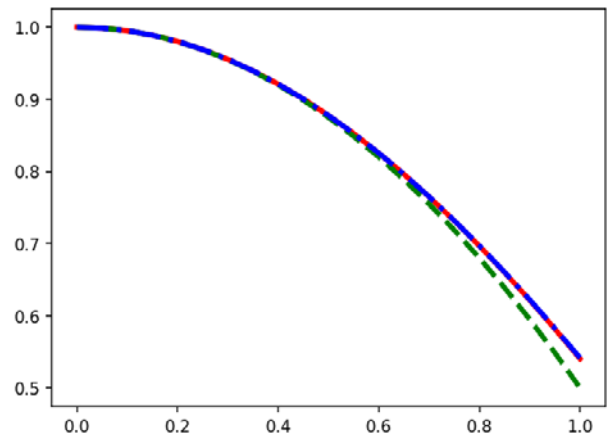


Рис. 3. Графік косинусоїдальної функції  $g_3 = \cos(x)$  (неперервна лінія) на відрізку значень незалежної змінної  $x \in [0, 1]$  та її відтворення двома членами степеневого ряду

$g_{31} = 1 - \frac{1}{2}x^2$  (штрихова) та трьома членами

$g_{32} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$  (штрихпунктирна)

## Програма № 2:

```
In [1]: import sympy
```

```
In [2]: from sympy import*
```

```
In [3]: x=symbols('x')
```

```
In [4]: y=Function('y')(x)
```

```
In [5]: y1=Function('y1')(x)
```

```
In [6]: y11=Function('y11')(x)
```

```
In [7]: y2=Function('y2')(x)
```

```
In [8]: y=ln(x+(x**2+1)**0.5)
```

```
In [9]: y11=y.series(x,0,7);y11
```

```
Out[9]:
```

```
x - x**3/6 + 3*x**5/40 + O(x**7)
```

```
In [10]: y2=y11.removeO();y2
```

```
Out[10]:
```

```
3*x**5/40 - x**3/6 + x
```

```
In [11]: y22=Function('y22')(x)
```

```
In [12]: y22=- x**3/6 + x
```

```
In [13]: from sympy.plotting import plot
```

```
In [14]: g=plot(y,(x,0,1),show=False,line_color='r')
```

```
In [15]: g1=plot(y22,(x,0,1),show=False,line_color='g')
```

```
In [16]: g2=plot(y2,(x,0,1),show=False,line_color='b')
```

```
In [17]: g.extend(g1)
```

```
In [18]: g.extend(g2)
```

```
In [19]: g.show()
```

```
Important
```

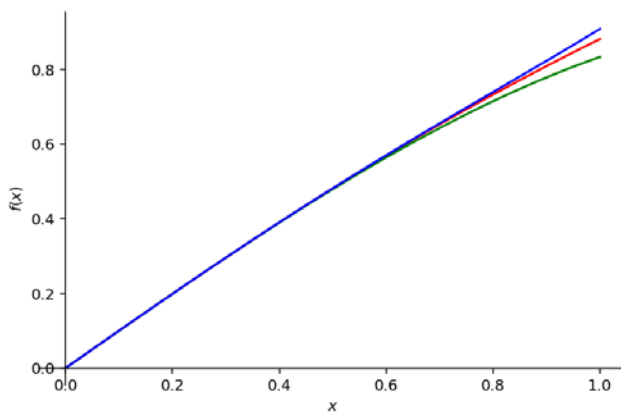


Рис. 4. Графік логарифмічної функції  $y = \ln(x + (x^2 + 1)^{0.5})$  (середня лінія) на відрізку значень незалежної змінної  $x \in [0, 1]$  та її відтворення двома членами степеневого ряду  $y22 = -x^{3/6} + x$  (нижня лінія) та трьома членами  $y22 = 3x^{5/40} - x^{3/6} + x$ . (верхня лінія)

Аналізуючи графіки, показані на рис. 4, бачимо, що логарифмічну функцію на відрізку значень  $x \in [0, 1]$  з достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати обрізаним степеневим рядом з трьома членами.

А на завершення викладення цього підрозділу нашої статті зауважимо, що, застосовуючи цю ж програму № 2, ми отримаємо графік радикальної функції та її степеневих наближень у вигляді, показаному на рис. 5.

Аналізуючи графіки, показані на рис. 5, бачимо, що радикальну функцію на відрізку значень  $x \in [0, 0,8]$  з достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати обрізаним степеневим рядом з трьома членами.

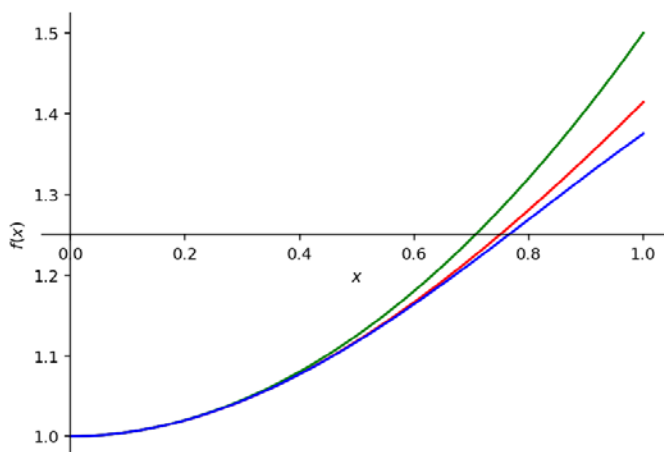


Рис. 5. Графік радикальної функції (середня лінія) на відрізку значень незалежної змінної  $x \in [0, 1]$  та її відтворення двома членами степеневого ряду  $y2 = 0.5x^{2} + 1$  (верхня лінія) та трьома членами  $y3 = -0.125x^{4} + 0.5x^{2} + 1$  (нижня лінія)

## Синтез еквівалентних моделей процесу обчислень параметрів оптимального руху електромобіля з мінімізацією похибок еквівалентування трансцендентних складових

Беручи до уваги графіки, показані на рис. 1—5, та діапазони значень незалежних змінних в моделях оптимального руху електромобіля, визначимо якими еквівалентними моделями у виразах (1)—(6) варто відобразити відповідні трансцендентні функції.

І почнемо з еквівалентних моделей експоненціальної та радикальної функцій в моделях (2), (4), (6).

До складу незалежної змінної  $(f_1 + 2f_2v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)$  в експоненціальних функціях у моделях (2), (4), (6) входить складова  $(\tau_{k+1} - \tau_k)$ , яка вимірюється тисячними долями секунди, а з графіків експоненціальної функції та її наближень, обрізаних степеневими рядами (рис. 1), ми бачимо, що в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 0,2 експоненту без внесення відчутних похибок можна апроксимувати прямою лінією, тобто, вважати, що

$$\exp((f_1 + 2f_2v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)) \approx 1 + (f_1 + 2f_2v_k)(\tau_{k+1} - \tau_k). \quad (13)$$

А з графіків радикальної функції та її наближень, обрізаних степеневими рядами (рис. 5), бачимо, що в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 0,5 цю функцію без внесення відчутних похибок можна апроксимувати параболою, тобто, вважати, що

$$\sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}(i_k(n-1))^2, \quad (14)$$

в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 0,8 цю функцію без внесення відчутних похибок можна апроксимувати виразом

$$\sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}(i_k(n-1))^2 - \frac{1}{8}(i_k(n-1))^4, \quad (15)$$

а в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 1 цю функцію без внесення відчутних похибок можна апроксимувати виразом

$$\sqrt{(i_k(n-1))^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}(i_k(n-1))^2 - \frac{1}{8}(i_k(n-1))^4 + \frac{1}{16}(i_k(n-1))^6, \quad (16)$$

в чому нескладно переконатись, застосувавши програму № 2.

А далі визначимо якими еквівалентними моделями у вигляді обрізаних степеневих рядів потрібно апроксимувати синусоїди, косинусоїди та логарифмічні функції у виразах (1), (3), (5).

З урахуванням того, що кути нахилу дорожнього полотна до горизонтальної площини на тих схилах і підйомах, для яких ще доцільно здійснювати оптимізацію руху електромобіля, не перевищують  $\pi/6$ , оскільки у разі їх перевищення уже потрібно перейматись не оптимізацією, а форсажем або гальмуванням, то, як бачимо з рис. 2 та 3, у виразах (1), (3), (5) в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 0,5 синусоїду та косинусоїду без внесення відчутних похибок можна апроксимувати виразами

$$\sin \beta_k \approx \beta_k - \frac{1}{6}\beta_k^3; \quad (17)$$

$$\cos \beta_k \approx 1 - \frac{1}{2}\beta_k^2, \quad (18)$$

а, як видно з рис. 4, в діапазоні значень незалежної змінної в межах від 0 до 1 логарифмічну функцію без внесення відчутних похибок можна апроксимувати виразом

$$\ln(i_k + \sqrt{i_k^2 + 1}) \approx i_k - \frac{1}{6}i_k^3 + \frac{3}{40}i_k^5. \quad (19)$$

Отже, підставляючи вирази (13), (16)—(19) у співвідношення (1)—(6), ми й отримаємо еквівалентні моделі процесу обчислень параметрів оптимального руху електромобіля з мінімізацією похибок еквівалентування трансцендентних складових.

## Висновки

З'ясовано, що процедури обчислення параметрів оптимального руху електромобіля як горизонтальним відрізком дороги, так і на спусках та підйомах вимагають здійснення обчислень конкретних значень великої кількості трансцендентних функцій, що за використання методів послідовних наближень приводить до значних втрат часу, необхідних для отримання кінцевих результатів. І оскільки ці результати потрібні водію електромобіля в процесі реалізації траєкторій оптимального руху, то, використовуючи уже відомі розрахункові формули для оцінки параметрів оптимального руху електромобіля дорогою, прокладеною на місцевості зі складним ландшафтом, водій буде не в змозі встигати ухвалювати оптимальні рішення, що будуть отримані з використанням класичних розрахункових формул у моменти часу, коли ситуація на дорозі уже зазнала суттєвих змін. Тож важливою науково-практичною задачею є синтез таких еквівалентних моделей процесів обчислень параметрів оптимального руху електромобіля, за допомогою яких результати цих обчислень надходили б до водія ще в ті моменти часу, в які мала місце дорожня ситуація, що оптимізується.

Саме такі еквівалентні моделі процесів обчислень параметрів оптимального руху електромобіля і запропоновані у цій роботі. В цих моделях запропоновано значення трансцендентних функцій, таких, як експоненціальна, синусоїдальна, косинусоїдальна, логарифмічна та радикальна, які є невід'ємними складовими моделей обчислення параметрів оптимального руху електромобіля, визначати, використовуючи апроксимацію вказаних трансцендентних функцій обрізаними степеневими рядами, для обчислення членів яких використовуються лише основні алгебраїчні операції, такі як додавання, віднімання, множення і ділення, які виконуються комп'ютерами миттєво. Для кожної трансцендентної функції визначена кількість членів в обрізаних степеневих рядах, якими ці функції апроксимуються та використання яких забезпечує прийнятну для практичних розрахунків точність результатів, отриманих в реальних умовах руху та у потрібні моменти часу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і В. В. Горенюк, *Системний аналіз оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом*, моногр. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2023, 114 с. ISBN 978-966- 641- 946-3.
- [2] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і Б. В. Пасека, «Математичні моделі оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом горизонтальним відрізком дороги за наявності на ньому населеного пункту та зупинкою у цьому пункті.» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 2, с. 62-70, 2025. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2025-179-2-62-70> .
- [3] Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, і Б. В. Пасека, «Математичні моделі оптимального руху електромобіля з асинхронним електроприводом за наявності на дорозі спусків, підйомів і населеного пункту та зупинкою у цьому пункті.» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 6, с. 89-98, 2025. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2025-183-6-89-98> .
- [4] *Python*. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.python.org/downloads/> .

Рекомендована кафедрою системного аналізу та інформаційних технологій ВНТУ

Дата надходження: 03.03.2026

Дата прийняття до друку після рецензування: 27.03.2026

Дата публікації: 8.04.2026

Ця робота ліцензується відповідно до

[Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

**Мокін Борис Іванович** — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: borys.mokin@gmail.com . <http://orcid.org/0000-0002-5906-6122>;

**Мокін Олександр Борисович** — д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: abmokin@gmail.com . <https://orcid.org/0000-0002-9277-3312>;

**Пасека Богдан Володимирович** — аспірант кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, e-mail: bogdanpaseka2000@gmail.com . <https://orcid.org/0009-0002-9975-2896> .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

**B. I. Mokin<sup>1</sup>**  
**O. B. Mokin<sup>1</sup>**  
**B. V. Pasiaka<sup>1</sup>**

## **Equivalent Models of the Computation Process in the Problem of Synthesis of Models of Optimal Motion of an Electric Vehicle with an Asynchronous Electric Drive**

<sup>1</sup>Vinnitsia National Technical University

*It has been clarified that the procedures for calculating the parameters of optimal motion of an electric vehicle along a road laid on terrain with complex landscape require the computation of specific values of a significant number of transcendental functions, which, when using methods of successive approximations, leads to significant time losses necessary for obtaining final results. And since these results are needed by the driver of the electric vehicle in the process of implementing optimal motion, then, using well-known calculation formulas obtained by various researchers for estimating the parameters of optimal motion of an electric vehicle along a road laid on terrain with complex landscape, due to delays in calculations, the driver will not be able to make optimal decisions in time that would be obtained using classical calculations at moments in time when the situation on the road has already undergone significant changes. Therefore, an important scientific and practical task is the synthesis of such equivalent models of the processes of calculating parameters of electric vehicle optimal motion, with the help of which the results of these calculations would reach the driver at those moments in time when the road situation that is being optimized still took place. It is precisely such equivalent models of the processes of calculating parameters of optimal motion of an electric vehicle that are proposed in this work. In these models, it is proposed to calculate the values of transcendental functions, such as exponential, sinusoidal, cosinusoidal, logarithmic and radical, which are integral components of models for calculating parameters of optimal motion of an electric vehicle, using approximation of the indicated transcendental functions by truncated power series, for the calculation of whose terms only basic algebraic operations are used, such as addition, subtraction, multiplication and division, which are performed by computers instantly. For each transcendental function in this work, the number of terms in truncated power series by which these functions are approximated has been investigated and determined, the use of which ensures acceptable accuracy of results for practical calculations obtained in real driving conditions and at the required moments in time.*

**Keywords:** mathematical model, optimization, electric vehicle, calculation of optimal motion parameters, transcendental components of parameter calculation models, equivalententing.

**Mokin Borys I.** — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: borys.mokin@gmail.com . <http://orcid.org/0000-0002-5906-6122>;

**Mokin Oleksandr B.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: abmokin@gmail.com . <https://orcid.org/0000-0002-9277-3312>

**Pasiaka Bohdan V.** — Post-Graduate Student of the Chair of System Analysis and Information Technologies, e-mail: bogdanpaseka2000@gmail.com