УДК 519.71: 330.42

І. Ю. Дзюбан, асп.;
О. В. Куц, асп.

ПРО АЛГОРИТМИ КЕРУВАННЯ МІКРОЕКОНОМІЧНИМ ОБ’ЄКТОМ В УМОВАХ ЗБУРЕНЬ — ОПТИМІЗАЦІЯ І СТАБІЛІЗАЦІЯ

Для керування економічним об’єктом в роботі використано принципи теорії управління. Модель фірми побудовано на основі моделі Солоу–Рамсея. Задача керування фірмою розбивається на дві підзадачі: детермінована задача прокладання оптимальної траєкторії на фіксованому проміжку часу і задача стабілізації об’єкта керування на відповідній опорній траєкторії щодо неспостережуваних збурень. Розв’язання задачі стратегічного планування діяльності компанії на деякому проміжку часу у випадку відсутності збурень приводить до оптимального процесу у вигляді рівняння в елементарних функціях, яке обирається опорною траєкторією розвитку компанії. Досліджено алгоритм зі зворотним зв’язком, який ефективно стабілізує опорну траєкторію. Накладені обмеження і мультиплікативність входження керувального впливу в рівняння еволюції капіталу фірми породжує складну нелінійну замкнену систему керування.

В актуарній математиці значне місце займають різноманітні проблеми страхового бізнесу. В переліку цих проблем знаходиться питання побудови математичної моделі страхової компанії в цілому.

Існуючі моделі актуарної математики звичайно присвячені окремим питання діяльності компанії. Розроблено цілий інструментарій, що дозволяє розрахувати різного характеру ризики в класичних задачах актуарної математики. Незважаючи на це, практично відсутня література в якій, як об’єкт дослідження, виступала б компанія в цілому, а існуючі моделі носять наближений характер.

На сьогодні є цілий ряд класичних моделей функціонування страхової компанії, описаних в [1, 2]. В даній роботі зроблена спроба побудови і дослідження моделі страхової компанії з використанням математичних моделей економічного зростання, яка дещо відрізняється від традиційного підходу.

Розглянемо страхову компанію, як модель Рамсея, у випадку виробничої функції типу Коба–Дугласа $Y = F\big(K(t), L(t)\big)$. Де $K(t)$ — капітал компанії, $L(t)$ — кількість застрахованих клієнтів (договорів страхування). Відповідно до моделі економічного зростання Рамсея, валовий випуск в кожен момент часу t ділиться на споживання та інвестиції (капіталовкладення).

$$Y(t) = C(t) + I(t) = \big(1 - u(t)\big)\,Y(t) + u(t)Y(t).$$

Позначимо через $u(t)$ $(0 \le u(t) \le 1)$ частину капіталу, що йде на розширення виробництва: надання нового виду страхових послуг, розширення територіального характеру (відкриття філіалів, дочірніх компаній). Якщо зробити перехід до питомих показників, то динаміку системи описуватиме така задача Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t)\,x(t)^{\alpha} - nx(t); \\ x(t_0) = x_0,\ t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ — середній капітал компанії (середня прибутковість договору страхування) в момент t; n — частина від $x(t)$, що йде на виплату страхового відшкодування, $0 \le n \le 1$. Це усереднена прогнозована величина, що отримується шляхом статистичного аналізу страхових виплат за попередній період діяльності страхової компанії. $x_0 = \dfrac{K_0}{L_0}$ — середній капітал страхової компанії на початку досліджуваного періоду t_0.

Наша мета полягає в побудові стратегічної траєкторії розвитку економічної системи, тому будемо називати нашу задачу задачею стратегічного планування. Введемо критерій якості зростання капіталу

$$L = -cx(T) + \rho \int_{t_0}^{T} \frac{\left[u(\tau)\, x(\tau)^{\alpha} \right]^2}{x(\tau)}\, d\tau, \tag{2}$$

де $x(T)$ — середня величина капіталу страхової компанії в момент T (кінцевий період планування). Величина $\int_{t_0}^{T} \frac{\left[u(\tau)\, x(\tau)^{\alpha} \right]^2}{x(\tau)}$ характеризує витрати на інвестування. Коефіцієнти c і ρ відображають ступінь важливості капіталу та інвестицій.

Функціонал L показує втрати страхової компанії за плановий період $[t_0,\ T]$. Він забезпечує оптимальний компроміс між прагненням компанії отримати максимальний прибуток (при мінімізації $-x(T)$ прибутки компанії максимальні) і мінімізувати середньозважені витрати на інвестування коштів. Отже, задача полягає в знаходженні такої частки інвестицій (оптимального керування $u^0(t)$), яка б забезпечувала мінімальне значення функціоналу (2).

Задача оптимального керування (1)—(2) має єдиний розв’язок для фіксованих даних [1]. Для її розв’язування скористаємося принципом максимуму Л. С. Понтрягіна. Тоді оптимальне керування

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \dfrac{x^{1-\alpha}\psi}{2\rho} > 1; \\ \dfrac{x^{1-\alpha}\psi}{2\rho}, \text{ якщо } 0 < \dfrac{x^{1-\alpha}\psi}{2\rho} < 1; \\ 0, \text{ якщо } \dfrac{x^{1-\alpha}\psi}{2\rho} < 0, \end{cases} \tag{3}$$

де ψ — розв’язок спряженої системи

$$\dot{\psi}(t) = \begin{cases} \left(n - \alpha x^{\alpha-1}\right)\psi + (2\alpha - 1)\rho x^{2(\alpha-1)}, \text{ якщо } \psi > 2\rho x^{\alpha-1}; \\ \left(n - \dfrac{\psi}{4\rho}\right)\psi, \text{ якщо } 0 < \psi < 2\rho x^{\alpha-1}; \\ n\psi, \qquad \text{якщо } \psi < 0. \end{cases} \tag{4}$$

В залежності від початкових даних, розв’язок (1), (2) знаходиться або в середині проміжку, або на кінцях. Перейдемо до еквівалентної системи.

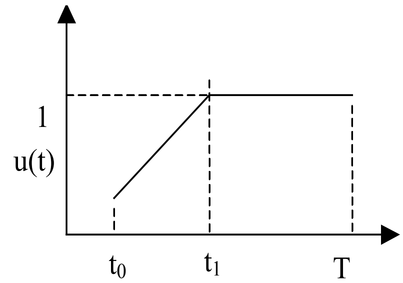

Рис. 1

Розглянемо випадок $a = 1/2$ [2], який дає можливість детальніше дослідити модель. Проаналізуємо всі можливі випадки на проміжку $[t_0,\ T]$.

1. На початку планового періоду страхова компанія інвестує частину свого капіталу в розширення, а починаючи з деякого моменту t_1 і до кінця планового періоду повністю інвестує прибуток (рис. 1). Така стратегія характерна для компаній, що вже функціонують на страховому ринку і в найближчий період планують розширення сфери надання страхових послуг (наприклад, відкриття нового виду страхування).

Момент зміни інвестиційної стратегії (точка переключення t_1)

$$t_1 = -\frac{2}{n}\ln\left|\frac{n\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}nt_0} + e^{\frac{1}{2}nT} + \sqrt{\left(n\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}nt_0} + e^{\frac{1}{2}nT}\right)^2 - \left(e^{nt_0} + \frac{4n\rho}{c}e^{nT}\right)}}{e^{nt_0} + \frac{4n\rho}{c}e^{nT}}\right|. \tag{5}$$

Траєкторія розвитку системи на проміжку $[t_0,\ T]$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{\left(2n\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_1-t)} - e^{\frac{1}{2}n(t_0-t)} + e^{n(t-t_0)}\right)^2}{4e^{n(t_1-t_0)}}, & t\in[t_0, t_1]; \\ x(t) = \dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{\left(c + \left(2n\rho e^{\frac{1}{2}n(T-t_1)} - c\right)e^{\frac{1}{2}n(T-t)}\right)^2}{c^2}, & t\in[t_1, T]. \end{cases} \tag{6}$$

Оптимальна частка інвестицій $u^0(t) = e^{\frac{1}{2}n(t-t_1)}$ згідно з (3).

Втрати страхової компанії за даної стратегії на проміжку $[t_0,\ T]$

$$L = -4\rho^2 e^{n(T-t_1)} + \frac{2}{n}\rho\left(1 - e^{\frac{1}{2}n(t_0-t_1)}\right) + \rho\,(T-t_1). \tag{7}$$

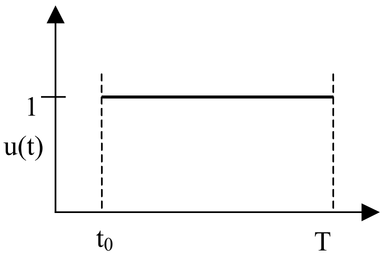

Рис. 2

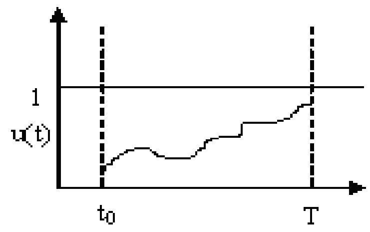

Рис. 3

2. Компанія протягом всього досліджуваного періоду повністю вкладає свій капітал в розширення виробництва ($u(t) = 1$) (рис. 2). Дана стратегія повинна бути обачливою, оскільки, за значного коефіцієнта страхових виплат, може призвести до суттєвого зменшення страхового капіталу, або, ще гірше до розорення страхової компанії. Така стратегія підійде для компаній, що займаються видами страхування, відсоток страхових виплат за якими незначний (наприклад, обов'язкове, особисте, відповідальності).

Оптимальна траєкторія розвитку системи описується

$$x(t) = \frac{1}{n^2}\left(1 + \left(n\sqrt{x_0} - 1\right)e^{\frac{1}{2}n(t_0-t)}\right)^2,\quad t\in[t_0, T]. \tag{8}$$

Втрати компанії за даної стратегії на проміжку $[t_0,\ T]$

$$L = -\frac{c}{n^2}\left(1 + \left(n\sqrt{x_0} - 1\right)e^{\frac{1}{2}n(t_0-T)}\right)^2 + \rho\,(T-t_0). \tag{9}$$

3. Протягом досліджуваного періоду в розширення інвестується деякий відсоток від прибутку ($0 < u(t) < 1$).

Тоді середній капітал компанії

$$x(t) = \frac{c\sqrt{x_0}\,e^{n(t_0-T)}}{4n\rho - c + ce^{n(t_0-T)}}\left(e^{\frac{1}{2}n(t-t_0)} - e^{\frac{1}{2}n(t_0-t)}\right) + \sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_0-t)},\quad t\in[t_0, T]. \tag{10}$$

Оптимальна частка інвестицій на проміжку $[t_0,\ T]$

$$u^0(t) = \frac{2nc\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_0-2T)}}{4n\rho + ce^{n(t_0-T)} - c}e^{\frac{1}{2}nt},$$

$$\frac{\rho}{c} > \frac{1}{4n}\left(1 - e^{n(t_0-T)}\right), \qquad T \le \frac{2}{n}\ln\left|\frac{4n\rho - c + ce^{n(t_0-T)}}{2cn\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_0-2T)}}\right|. \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &2nc\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_0-2T)}e^{\frac{1}{2}nt} - 4n\rho - ce^{n(t_0-T)} + c < 0;\\ &2nc\sqrt{x_0}\,e^{n(t_0-T)} - 4n\rho - ce^{n(t_0-T)} + c < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Втрати страхової компанії за даної стратегії на проміжку $[t_0,\ T]$

$$L = -\frac{16cn^2\rho^2x_0e^{n(t_0-T)}}{\left(4n\rho - c + ce^{n(t_0-T)}\right)^2} + \frac{4\rho c\sqrt{x_0}\,e^{\frac{1}{2}n(t_0-2T)}}{4n\rho - c + ce^{n(t_0-T)}}\left(e^{\frac{1}{2}nT} - e^{\frac{1}{2}nt_0}\right); \tag{13}$$

$$u^0[x] = \frac{2nc\sqrt{x(t)}\,e^{n(t-T)}}{4n\rho + ce^{n(t-T)} - c}. \tag{14}$$

Оберемо для числового прикладу моделі такі вихідні дані: $T := 24$; $t_0 := 0$; $x_0 :=$ 250; $n := 0{,}035$; $c := 0{,}1$.

Розв’язання задачі стратегічного планування діяльності компанії на деякому проміжку часу у випадку відсутності збурень приводить до оптимального процесу у вигляді рівняння в елементарних функціях (8), яке оберемо опорною траєкторією розвитку компанії.

Для довільної фірми оберемо більш загальний вигляд диференційного рівняння, яке описує її діяльність.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Pu(t)f\left(x(t)\right) - nx(t) - \theta_3(t);\\ x(t_0) = x_0, t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{15}$$

де $f(x(t))$ — виробнича функція, а $\theta_3(t)$ — не спостережуване збурення, яке впливає на об’єкт керування (ОК).

За допомогою комп’ютерного моделювання, для виробничої функції

$$f\left(x(t)\right) = a\sqrt{x(t)}$$

покажемо, що вибір керуючого алгоритму, який побудовано за законом зворотного зв’язку (6), забезпечує стабілізацію ОК до опорної траєкторії.

$$u(t) = k\left(x^*(t) - x(t)\right). \tag{16}$$

Оберемо такі параметри ОК.

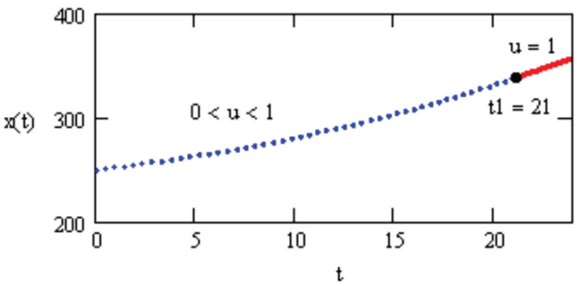

Рис. 4. Стратегія 1:

$x(T) = 356{,}76$; $L = -14{,}011$

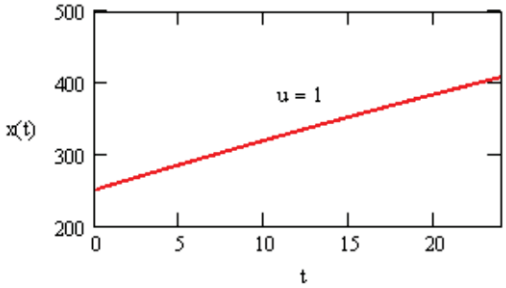

Рис. 5. Стратегія 2:

$x(T) = 407{,}535$; $L = -19{,}153$

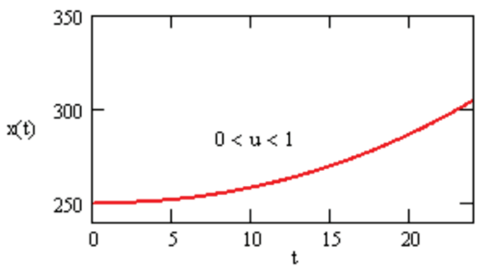

Рис. 6. Стратегія 3:

$X(T) = 304{,}886$; $L = -17{,}29$

$$x(t_0) = 1000000 \quad \text{грн}; \qquad u(t_0) = 0,36;$$
$$P = 1,2 \quad \frac{\text{грн}}{\text{шт.}}; \qquad \theta_3(t_0) = 0 \quad \frac{\text{грн}}{\text{день}}.$$
$$a = 0,5 \quad \frac{\text{шт.}}{\text{день грн}}; \tag{17}$$
$$N = 0,2 \quad \frac{1}{\text{день}};$$

Будемо вважати, що опорна траєкторія на деякому проміжку постійна $x^*(t) = \text{const} = = 1000000$ грн.

Страхова компанія — складна економічна динамічна система. Головні її показники (керуючі параметри, фазові змінні) є функціями часу. Крім того, розглянута модель її діяльності — нелінійна. Незважаючи на те, що нелінійні динамічні моделі оптимального керування, звичайно, складно аналізувати, специфіка розглянутої моделі дозволяє побудувати ефективний алгоритм аналізу її діяльності. Оптимальне керування здійснюється за допомогою інвестиційних вкладень — частини валового продукту, що направлена на розширення страхової діяльності.

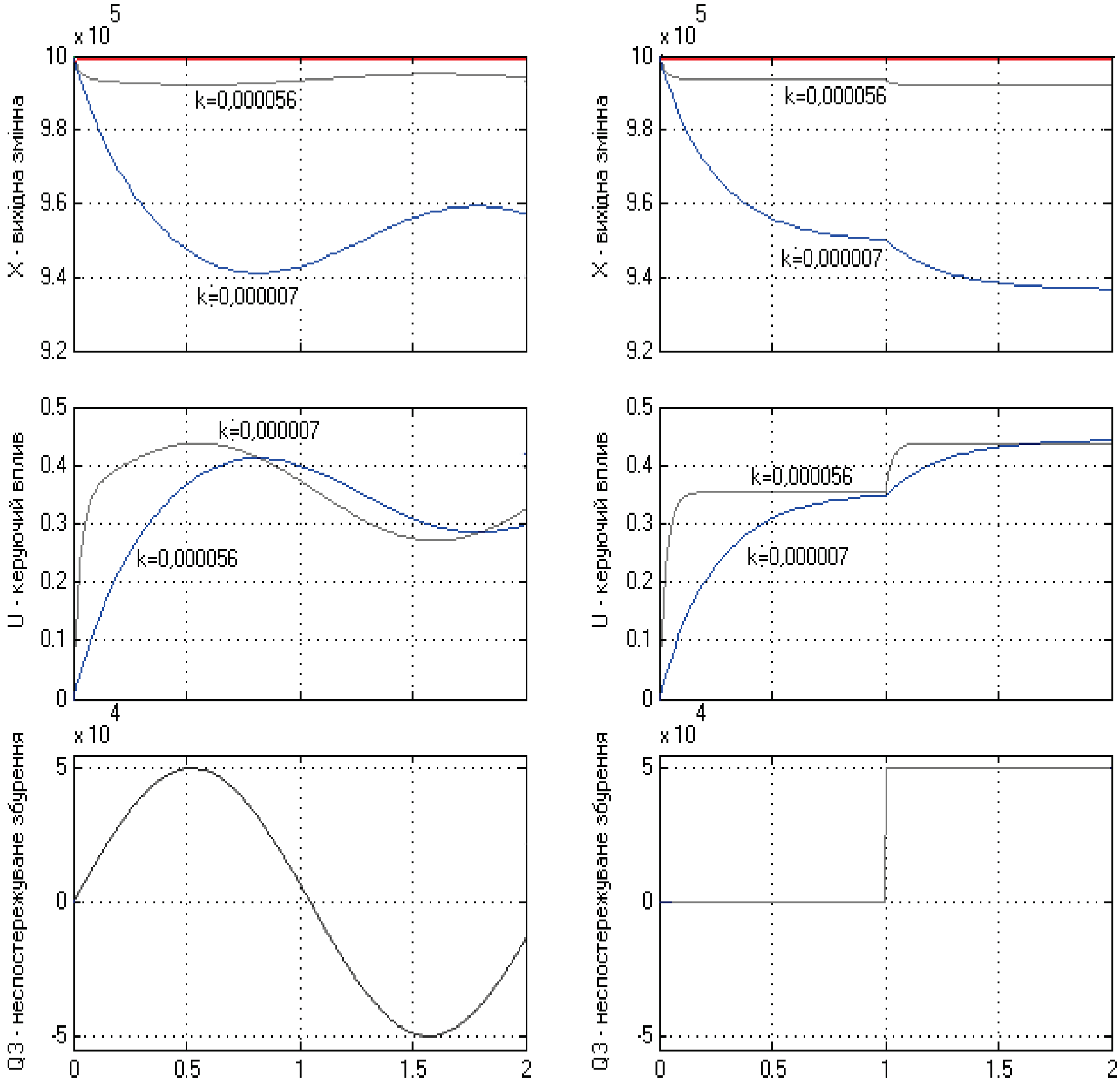

Рис. 7. Алгоритм лінійного зворотного зв’язку ефективно бореться з неспостережуваними збуреннями

Висновки

У результаті дослідження були отримані в замкнутій формі оптимальне керування й оптимальні фазові траєкторії, наведені їх аналітичні залежності, як функцій часу.

Запропонована модель, побудована на основі аналізу виробничої функції Коба-Дугласа, дозволяє робити висновки про стратегічний розвиток страхової компанії. Модель враховує страхове відшкодування і дозволяє встановити моменти часу, в яких здійснюється зміна стратегії оптимального керування. Аналіз проведений в термінах значення капіталу віднесеного на кількість застрахованих (питоме значення страхового капіталу).

Для аналізу моделі використано принцип максимуму Л. С. Понтрягіна, що дало можливість значно спростити процедуру одержання магістральної траєкторії розвитку. Викладений метод дозволяє розширити результати дослідження для аналізу траєкторій розвитку окремих видів страхування.

Фірма знаходиться під впливом чинників зовнішнього економічного середовища — збурень, які істотно можуть змінити обраний плановий режим функціонування фірми. Саме тому оперативне керування потребує зворотного зв'язку для стабілізації об'єкта керування на обраній опорній траєкторії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Л. Сталерью. Равновесие и экономический рост. — М.: Статистика, 1974. — 470 с.

2. Понтрягин Л. С. , Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.

3. М. Г. Охрименко. О некоторых классах задач оптимального управления, допускающих распад П-систем // Кибернетика. — 1974. — № 2. — С. 131—132.

4. М. Г. Охрименко. О некоторых свойствах однородных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Том 9. — № 12. —С. 2272—2275.

5. М. Г. Охрименко. Решение некоторых нелинейных задач оптимального управления // Кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 117—118.

6. Ахмедова А. А., Змеев О. А., Терпугов А. Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу // Вестник ТГУ. — 2002. — № 275. — С. 181—184.

7. Кац В. М., Лившиц К. И. Влияние расходов на рекламу на характеристики страховой компании // Известия ВУЗов России. — 2004. — № 1. — Физика —С. 29—32.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом XIII Міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006, 25—28.09.2006 р.)

Надійшла до редакції 23.11.06
Рекомендована до друку 12.12.06

Дзюбан Ірина Юріївна — аспірантка, ***Куц Олексій Володимирович*** — аспірант.

Кафедра математичного моделювання економічних систем, Національний Технічний Університет України «Київський політехнічний інститут»