УДК 517.9

Д. Є. Акбаров, д. ф.-м. н., проф.,
В. М. Мізерний, к. т. н., доц.

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ОБ'ЄКТАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Частина III

Постановка задачі

В роботі представлені подальші дослідження задач оптимального керування нелінійними об′єктами з розподіленими параметрами.

Використовуючи операторну схему [1, 2], виведемо необхідні умови оптимальності функції керування $u(t,\ \omega)$ для об′єктів, що описуються граничними задачами для квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу. Необхідні умови представлені у формі системи, що містить пряму задачу, спряжену та умови стаціонарності функції Лагранжа.

Нехай стан об′єкта $x(t,\ \omega)$ і параметр керування $u(t,\ \omega)$ визначені в обмеженій області $\Omega \subset R^N$ з границею $\partial\Omega$ і часовому відрізку $[0,\ T] = S$.

Має місце така задача:

$$\int_0^T \int_\Omega J\left[x(t,\omega),\ u(t,\omega)\right] d\omega dt = I(x,\ u) \to \inf; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 x}{\partial \omega_i^2} + Q\left(t, \omega, x(t,\omega),\ \frac{\partial x}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \omega_N},\ u(t,\omega)\right) = f(t,\omega), \tag{2}$$

$$x(0,\cdot) = 0,\ x'(t,\cdot)\big|_{t=0} = \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial t}\Big|_{t=0} = x'(0,\cdot) = 0,\ x(t,\omega)\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \forall t \in S. \tag{3}$$

Введемо відповідні позначення за таких припущень відносно Q *і* J, як у задачі (1)—(3) [2]:

$$y(t) = x(t,\cdot),\ \ u(t,\cdot) = v(t),\ y'(t) = \frac{\partial x}{\partial t},\ y''(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\ \ y(0) = x(0,\cdot) = 0;$$

$$y'(0) = \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial t},\ \ g(0) = f(t,\cdot),\ \ Ly(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \omega_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 x(t,\omega)}{\partial \omega_i^2};$$

$$G\big(y(t),\ v(t)\big) = Q\left(t,\ y(t),\ \frac{\partial y}{\partial \omega_1},\ldots,\ \frac{\partial y}{\partial \omega_N},\ v(t)\right). \tag{4}$$

Тоді вирази (1), (2) приймуть вигляд:

$$\int_0^T \int_\Omega J\big(y(t),\, v(t)\big)\, d\omega\, dt = I(y, v) \to \inf; \tag{5}$$

$$y''(t) - Ly(t) + G\big(y(t),\ v(t)\big) = g(t), \tag{6}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{7}$$

Виходячи з граничних умов, припускаємо, що $y \in \left(S \to \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \right) = X,$

$$y',\ y'' \in X^*;\ \frac{\partial y}{\partial \omega_i} \in \big(S \to L_p(\Omega)\big),\ v \in \big(S \to L_r(\Omega)\big),\ g \in \big(S \to L_p(\Omega)\big).$$

Тоді

$$\begin{aligned} &I: L_p(S;\ X) \times L_r\big(S;\ L_r(\Omega)\big) \to JR; \\ &L: L_p(S;\ X) \to L_q(Q);\ \ Q = S \times \Omega; \\ &G: L_p(S;\ X) \to L_q(Q). \end{aligned}$$

Складемо відповідну функцію Лагранжа, ввівши спряжену функцію:

$$\begin{aligned} F(y,\ v) = {} & I(y,\ v) + \int_0^T \int_\Omega \psi(t) y''(t)\, d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega dt - \\ & - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) Q\left(t,\ \omega,\ y(t),\ \frac{\partial y}{\partial \omega_1},\ldots,\ \frac{\partial y}{\partial \omega_N},\ v(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t)\, d\omega dt, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\psi \in X$.

Отриманий лагранжіан відрізняється від (1)—(3) [2] тільки другим членом $\int_0^T \int_\Omega \psi(t) y''(t)\, d\omega dt$.

Припустивши, що виконані умови теореми Фубіни [3], та замінюючи порядок інтегрування і використовуючи правило інтегрування по частинах, отримаємо:

$$\int_0^T\int_\Omega \psi(t)y''(t)\,d\omega\,dt = \int_0^T\int_\Omega \psi(t)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}d\omega\,dt = \int\left[\left(\psi(t)\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Big|_0^T - \int_0^T\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\frac{\partial y(t)}{\partial t}dt\right]d\omega =$$

$$= \int_\Omega\left\{\left[\psi(t)\frac{\partial y(t)}{\partial t} - \psi(0)\frac{\partial y(0)}{\partial t}\right] - \left[\psi'(t)y(t)\right]\Big|_0^T + \int_0^T y(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dt\right\}d\omega = \tag{9}$$

$$= \int_\Omega\left\{\left[\psi(t)y'(t) - \psi(0)y'(0)\right] - \left[\psi'(T)y(T) - \psi'(0)y(0)\right] + \int_0^T y(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dt\right\}d\omega.$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = y'(0) = 0$ і припускаючи для спряженої задачі $\psi(t) = \psi'(t) = 0$, отримаємо:

$$\int_0^T\int_\Omega \psi(t)y''(t)\,d\omega\,dt = \int_0^T\int_\Omega y(t)\psi''(t)\,d\omega\,dt. \tag{10}$$

Далі, визначивши частинні варіації і прирівнявши їх до нуля, отримаємо необхідні умови оптимальності:

$$\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^N\left[\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial\omega_i^2} + \frac{\partial Q}{\partial y_{\omega_i}}\cdot\frac{\partial\psi(t)}{\partial\psi_i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y_{\omega_i}\partial\omega_i} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\psi(t)\right] = 0; \tag{11}$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0,\ \psi(t) = \psi'(t) = 0\,\big|_\Omega\ \ \forall t\in S; \tag{12}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial u}\psi(t) = 0. \tag{13}$$

Висновки

Таким чином, спочатку $\forall u$ розв′язується нелінійна задача (1)—(3), потім (11)—(13). Наступним кроком знаходимо можливий оптимальний розв′язок задачі шляхом розв′язання лінійної системи рівнянь відносно Ψ, u.

Тобто, розглянута можливість застосування операторної схеми у випадку відсутності обмежень на фазові змінні та функції керування.

З іншого боку, викликає інтерес задача оптимального керування (1)—(3) з явними обмеженнями типу інтегральних нерівностей, а саме:

нехай $J_i : S\times\Omega\times JR\times JR \to JR$, $i = 1,\ldots,m$ і мають місце нерівності

$$\int_0^T\int_\Omega J_i\big(t,\omega, x(t,\omega),\ u(t,\omega)\big)d\omega\,dt = I_i(x,u) \ge 0,\ i = 1,\ldots,m. \tag{14}$$

Припустимо, що функції J_i задовольняють таким умовам:

1) функція $J_i : S\times\Omega\times JR\times JR \to JR$ борелівська за сукупністю змінних;

2) функція $(x;u)\mapsto J_i(t,\omega,x,u)$ класу C^1 на JR^2 $\forall(t;\omega)\in S\times\Omega$;

3) $\exists$ $a_i\in X$, $c_i > 0$, то $\left\|J_i'(t,\omega,x,u)\right\| \le a_i(t,\omega) + c_i\left(|x|^{p-1} + |u|^{1/q}\right)$,

де $J_i' = \left(J_{ix}';\ J_{iu}'\right)$ — градієнт функції J_i.

За цих умов функціонали $I_i : L_p(S;X) \times L_r(Q) \to JR$, $i = 1, ..., m$ є строго диференційовани-ми і тому виконуються умови теореми про правила множників Лагранжа.

Функція Лагранжа має вигляд:

$$\begin{aligned} F(\lambda, \psi, y, v) = {} & \lambda_0 \int_0^T \int_\Omega J_0\big(t, \omega, y(t,\omega), v(t,\omega)\big) d\omega\, dt + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_0^T \int_\Omega J_i\big(t, \omega, y(t,\omega), \vartheta(t,\omega)\big) d\omega\, dt + \\ & + \int_0^T \int_\Omega \psi(t)\, y''(t)\, d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \omega_i^2} d\omega\, dt - \\ & - \int_0^T \int_\Omega \psi(t)\, Q\left(t, \omega, y(t), \frac{\partial y}{\partial \omega_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial \omega_N}, \vartheta(t)\right) d\omega dt - \int_0^T \int_\Omega \psi(t) g(t)\, d\omega\, dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді знайдуться множини $\hat{\lambda}, \hat{\psi}$, для яких виконуються умови стаціонарності функції Лагранжа

$$F_y'\left(\hat{\lambda}, \hat{\psi}, y, u\right) + F_u'\left(\hat{\lambda}, \hat{\psi}, y, u\right) = 0, \quad (16)$$

умови узгодження знаків $\hat{\lambda}_i \geq 0$ та умов доповнювальної нежорсткості

$$\hat{\lambda}_i I_i(y, u) = 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Далі, аналогічно попередньому, визначивши частинні варіації функції (15), за допомогою (16) можна отримати відповідну модифікацію необхідних умов оптимальності (11)—(13).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акбаров Д. Є., Мізерний В. М. Необхідні умови оптимального управління об′єктами з розподіленими параметра-ми. Частина I. // Вісник ВПІ. — 2003. — № 5. — С. 104—110.

2. Акбаров Д. Є., Мізерний В. М. Необхідні умови оптимального управління об′єктами з розподіленими параметра-ми. Частина II. // Вісник ВПІ. — 2004. — № 1. — С. 131—135.

3. Гаевский Г., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные урав-нения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

Рекомендована кафедрою інтеграції навчання з виробництвом

Надійшла до редакції 10.07.03
Рекомендована до друку 6.05.04

Акбаров Давлаталі Єгіталієвич — професор кафедри математичного аналізу.

Ташкентський національний університет;

Мізерний Віктор Миколайович — завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом.

Вінницький національний технічний університет