

УДК 621.372

В. А. Гикавий, к. т. н., доц.

МОДЕЛЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО СИГНАЛУ

Розглянуто питання подання нестационарного сигнала у вигляді параметричної моделі з часозалежними коефіцієнтами. Кожен з таких коефіцієнтів є лінійною комбінацією базисних функцій з вагою, що обчислюється.

У короткочасному спектральному аналізі нестационарного процесу інтервал його дослідження розбивають на сегменти, де він вважається стаціонарним.

Якщо подати нестационарний процес у вигляді авторегресійної моделі з часозалежними коефіцієнтами, то це дозволить не застосовувати припущення про його квазістаціонарність.

Відомо, що відлік стаціонарного процесу у часі може бути поданий у вигляді лінійної комбінації p попередніх відліків з постійними коефіцієнтами.

Аналогічно n -й відлік нестационарного процесу $y(n)$ можна подати з помилкою $e(n)$ у вигляді авторегресійного ряду з часозалежними коефіцієнтами $a_i(n)$, $i = 1 \dots p$.

Таким чином, метою роботи є оцінка коефіцієнтів авторегресійної послідовності $a_i(n)$.

При цьому кожен коефіцієнт $a_i(n)$ можна розкласти за q базисними функціями $g_m(n)$ з відповідними ваговими коефіцієнтами a_{im} . Тоді

$$y(n) = \sum_{i=1}^p \sum_{m=0}^q a_{im} g_m(n-i) y(n-i) + e(n). \quad (1)$$

Показано, що мінімізація квадратичної помилки відтворення процесу відносно коефіцієнтів a_{im} приводить опис процесу до системи рівнянь, яка схожа на систему нормальних рівнянь Юла-Уолкера для стаціонарного процесу. При цьому дисперсія помилки передрікання відліку процесу дорівнює визначнику його коваріаційної матриці

$$E = E[e^2(n)] = E \left[\left(y(n) + \sum_{i=1}^p \sum_{m=0}^q a_{im} g_m(n-i) y(n-i) \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Таким чином, система рівнянь для нестационарного процесу фактично зводиться до $q+1$ рівнянь Юла-Уолкера з постійними коефіцієнтами для послідовностей, які отримуються внаслідок поелементного множення вектора відліків процесу, що досліджується, на вектори відліків $q+1$ базисних функцій.

Мінімізація квадратичної помилки відносно коефіцієнтів a_{im} приводить до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^p \sum_{m=0}^q a_{im} r_{mk}(i, j) = -r_{0k}(0, j); \quad 1 < j < p, \quad 0 < k < q. \quad (3)$$

де $r_{mk}(i, j) = E[g_m(n-i) y(n-i) g_k(n-j) y(n-j)]$ — узагальнені функції кореляції.

Еквівалентна матрична форма системи рівнянь (3) нагадує систему нормальних рівнянь Юла-Уолкера для стаціонарного процесу [1]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(0,0) & \mathbf{R}(0,1) & \dots & \mathbf{R}(0,p) \\ \mathbf{R}(1,0) & \mathbf{R}(1,1) & \dots & \mathbf{R}(1,p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}(p,0) & \mathbf{R}(p,1) & \dots & \mathbf{R}(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^T \\ \mathbf{a}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_p^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{pq} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $\mathbf{a}_i^T$ — компоненти вектора коефіцієнтів $\mathbf{A}_t$ розмірністю $(p+1)(q+1) \times 1$;

$\mathbf{A}_t = [\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_q]^T$; $\mathbf{a}_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$; $\mathbf{a}_i = [a_{i0} \ a_{i1} \ \dots \ a_{iq}]^T$; $\mathbf{R}(i, j)$ — блоки симетричної коваріаційної матриці сигналу $\mathbf{R}$ розмірністю $(p+1)(q+1) \times (p+1)(q+1)$

$$\mathbf{R}(i, j) = \begin{bmatrix} r_{00}(i, j) & r_{01}(i, j) & \dots & r_{0q}(i, j) \\ r_{10}(i, j) & r_{11}(i, j) & \dots & r_{1q}(i, j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{q0}(i, j) & r_{q1}(i, j) & \dots & r_{qq}(i, j) \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$\mathbf{E}_{pq}$ — вектор розмірністю $(q+1) \times 1$; $\mathbf{E}_{pq} = [\rho_{00} \ \rho_{10} \ \dots \ \rho_{q0}]$; $(\rho_{0k})_{k=0 \dots q}$ — коваріації між помилкою передрікання $e(n)$ і $y(n)g_k(n)$; $\rho_{00} = \sigma^2$ — дисперсія помилки передрікання відліку, вона дорівнює визначнику коваріаційної матриці сигналу [2]

$$\sigma^2 = \det \mathbf{R}.$$

Таким чином, рівняння (6) фактично зводиться до $q+1$ рівнянь Юла-Уолкера з постійними коефіцієнтами для сигналів, які отримуються внаслідок поелементного множення вектора відліків сигналу, що досліджується, на вектори відліків $q+1$ базисних функцій.

Можна припустити, що параметрична модель являє собою трансверсальний фільтр порядку p з набором коефіцієнтів $a_i(n)$, $i = 1 \dots p$, збудження якого білим шумом $u(n)$ з певним наближенням дозволяє отримати на виході фільтра сегмент процесу, що аналізується

$$\bar{y}(n) = \sum_{i=1}^p a_i(n) u(n-i). \quad (6)$$

Оскільки, частіше за все, відсутні відомості про апіорний розподіл ймовірності отримання точної оцінки, для оцінювання доцільно використати метод максимальної правдоподібності (МП) [3, 4].

При цьому за оцінку вектора коефіцієнтів приймається таке значення $\mathbf{A}_t$, яке з найбільшою ймовірністю обумовлює появу на виході моделі сигналу $\mathbf{y}$. Відомо, що для кінцевого N оцінка МП має найменшу дисперсію для нормального розподілу щільності ймовірності [4]. Функція правдоподібності при цьому має вигляд

$$P(\mathbf{y} \perp \mathbf{A}_t) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma^2)^{-1/2} \exp \left[-(\mathbf{A}_t^T \mathbf{R} \mathbf{A}_t) / 2\sigma^2 \right], \quad (7)$$

де $\mathbf{R}$ — коваріаційна матриця сигналу, модель якого підганяється, розмірністю $(p+1)(q+1) \times (p+1)(q+1)$, вона визначається згідно з (4) і (5); σ^2 — дисперсія помилки передрікання вихідного сигналу моделі, мінімальне значення якої дорівнює дисперсії шуму збудження.

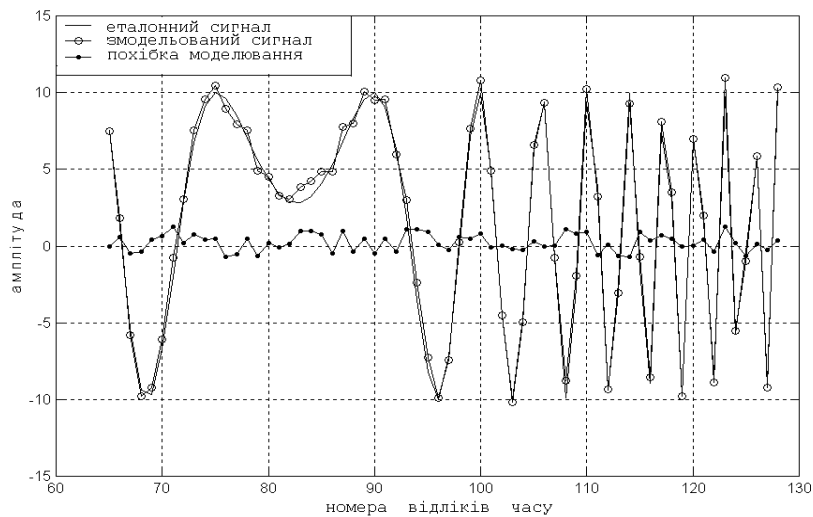
Максимум функції правдоподібності досягається при $\sigma^2 = \mathbf{A}_t^T \mathbf{R} \mathbf{A}_t$.

Якщо $p \ll N$, то оцінки параметрів $\mathbf{A}_t$ і σ^2 можуть бути знайдені, розв'язуючи систему рівнянь (4).

Було промодельовано сигнал

$$y(t) = 10 \cos \left[8\pi (5t - t^3) \right], \quad (8)$$

часову залежність якого в межах 65—128 відліків часу показано на рисунку (суцільна лінія). Біспектр і функція бікогерентності цього сигналу мають ненульові значення, що свідчить про його нестационарність [5].



Еталонний сигнал і вихідний сигнал моделі 17-го порядку

Надання часозалежних коефіцієнтів параметричної моделі було здійснено в базисі дискретних косинусних функцій

$$g_0(n) = 1/\sqrt{N}, \quad g_k(n) = \sqrt{2}/N \cos[(2n+1)k\pi/2N], \quad \text{де } n = 0 \dots N-1.$$

Загальна кількість базисних функцій $q+1=N$. Порядок моделі p обирається в межах $N/4 \leq p < N/2$.

Досліджувалися сегменти сигналу по 64 відліки, оптимальний порядок моделі p на інтервалі дослідження дорівнює 17.

Розв'язання рівнянь (6) було проведено згідно з алгоритмом Юла-Уолкера, що використовує рекурсію Левінсона [2]. Для кожного відліку часу були отримані набори коефіцієнтів $a_i(n)$, за якими згідно з (6) були відтворені відліки зазначеного вище сегмента сигналу $y(n)$ (рис.).

Висновки

1. Показано можливість подання нестационарного сигналу у вигляді параметричної моделі із залежними від часу коефіцієнтами.
2. Запропонована методика дозволяє спростити нестационарний сигнал до лінійної моделі.
3. Відпадає необхідність в припущенні про квазістационарність сигналу в інтервалі дослідження, як наприклад, при короткочасному спектральному аналізі.
4. Модель можна використати у відновленні сигналів з втраченими відліками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Немов А. В., Добырь В. В. Оперативные методы пространственного оценивания угловых координат // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1998. — № 6. — С. 3—18.
2. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
3. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с.
4. Далматов А. Д., Елисеев А. А., Лукошкин А. П. и др. Обработка сигналов в радиотехнических системах. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. — 400 с.
5. Hinich M. J. Testing for gaussianity and linearity of stationary time series // J. Time Series Analysis. 1982. Vol. 3. С. 169—176.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом III Міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та приладобудування (СПРТП-2007)» (31.05—2.06.2007 р.)

Надійшла до редакції 30.09.07
Рекомендована до друку 04.10.07

Гикавий Віктор Арсенійович — доцент кафедри електроніки.

Вінницький національний технічний університет