

УДК 681.5.015+62-83:629.433

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.;

О. Б. Мокін, к. т. н., доц.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БАГАТОМАСОВИХ РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ (ЧАСТИНА 2)

Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем класу багатовагонних потягів з електричною тягою, що запропоновані в першій частині, доведені до вигляду, придатного для розв'язання конкретних задач.

Вихідні умови та постановка задачі

У роботі [1] запропоновано математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем класу багатовагонних потягів з електричною тягою, надалі — БМРДС класу БВПЕТ, що рухаються в часі t у напрямку від зупинки A до сусідньої зупинки B . Відрізок залізничної колії між зупинками A та B з накладеною на площину прокладення цієї колії системою координат (x, y) та виділенням прямолінійних ділянок Aa , c_1c_2 , bB і закруглень ac_1 радіусом R_1 з центром у точці O_1 та c_2b радіусом R_2 з центром в точці O_2 наведений на рис. 1.

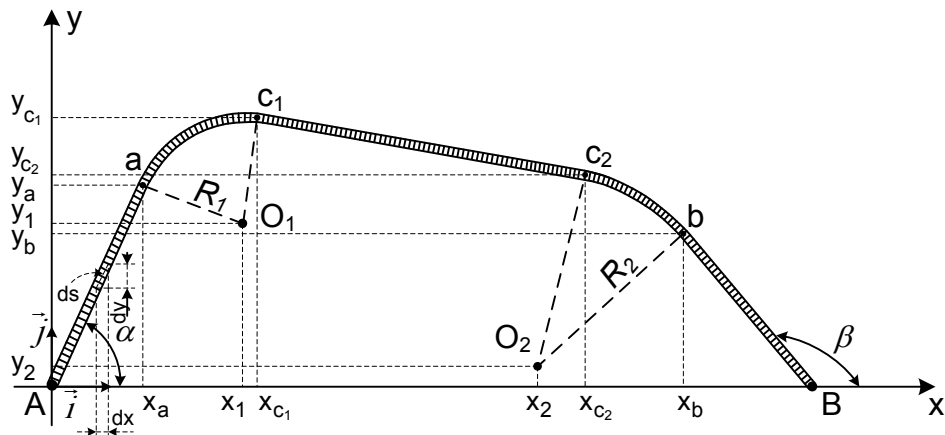


Рис. 1

Математичні моделі роботи [1] мають вигляд

$$m_l \frac{d\vec{V}_l}{dt} = \vec{F}_{Tl}(x, y) - \vec{F}_{\Gamma l}(x, y), \quad l = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де m_l — маса l -го вагона, \vec{V}_l — вектор його швидкості, а $\vec{F}_{Tl}(x, y)$, $\vec{F}_{\Gamma l}(x, y)$ — вектори сил, що діють на l -й вагон при знаходженні його центру ваги в точці з координатами (x, y) , або

$$m_l \frac{dV_l^x}{dt} = F_{Tl}^x(x, y) - F_{\Gamma l}^x(x, y), \quad l = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$m_l \frac{dV_l^y}{dt} = F_{\Gamma l}^y(x, y) - F_{\Gamma l}^y(x, y), \quad l = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де

$$y = \begin{cases} k_a x, & x \in [x_A, x_a]; \\ y_1 + \sqrt{R_1^2 - (x - x_1)^2}, & x \in [x_a, x_{c_1}]; \\ k_{c_1} (x - x_{c_1}) + y_{c_1}, & x \in [x_{c_1}, x_{c_2}]; \\ y_2 + \sqrt{R_2^2 - (x - x_2)^2}, & x \in [x_{c_2}, x_b]; \\ k_b (x - x_b) + y_b, & x \in [x_b, x_B]; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} k_a = \operatorname{tg} \alpha; \\ k_b = \operatorname{tg} \beta; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 f(t); \\ f(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3; \end{cases} \quad (6)$$

за умови, що

$$\frac{d\vec{V}_l}{dt} = \vec{i} \frac{dV_l^x}{dt} + \vec{j} \frac{dV_l^y}{dt}, \quad l = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\vec{F}_{\Gamma l}(x, y) = \vec{i} F_{\Gamma l}^x(x, y) + \vec{j} F_{\Gamma l}^y(x, y), \quad l = \overline{1, n}; \quad (8)$$

$$\vec{F}_{\Gamma l}(x, y) = \vec{i} F_{\Gamma l}^x(x, y) + \vec{j} F_{\Gamma l}^y(x, y), \quad l = \overline{1, n}. \quad (9)$$

В математичних моделях (1)—(9) для того, щоб їх використовувати при розв'язанні задач аналізу динаміки та оптимізації, не вистачає математичних моделей сил $\vec{F}_{\Gamma l}(x, y)$, $\vec{F}_{\Gamma l}(x, y)$, $l = \overline{1, n}$, в їх проекціях на осі координат x , y , тобто математичних моделей проєкцій $F_{\Gamma l}^x(x, y)$, $F_{\Gamma l}^y(x, y)$, $F_{\Gamma l}^x(x, y)$, $F_{\Gamma l}^y(x, y)$. Побудові цих математичних моделей і присвячена ця стаття.

Побудова математичних моделей сил, що діють на вагон

Почнемо з загальних викладок. Очевидно, що для електровоза буде справедливою математична модель

$$\begin{cases} m_1 \frac{dV_1^x}{dt} = F_{\Gamma 1}^x(x, y) - F_{\Gamma 1}^x(x, y); \\ m_1 \frac{dV_1^y}{dt} = F_{\Gamma 1}^y(x, y) - F_{\Gamma 1}^y(x, y), \end{cases} \quad (10)$$

яку отримуємо із (2), (3) при $l = 1$.

Задамось запитанням: «На що витрачається сила тяги $\vec{F}_{\Gamma 1}$ електровоза?» Або іншими словами: «Із чого складається гальмівна сила $\vec{F}_{\Gamma 1}$ для електровоза?»

Відповідь очевидна: «Сила $\vec{F}_{\Gamma 1}$ складається з гальмівної сили $\vec{F}_{\Gamma 1}^*$, створюваної безпосередньо самим електровозом, та тягової сили $\vec{F}_{\Gamma 2}$ для другого вагона». Тобто, маємо

$$\vec{F}_{\Gamma 1} = \vec{F}_{\Gamma 1}^* + \vec{F}_{\Gamma 2}, \quad (12)$$

або, що еквівалентно, —

$$\begin{cases} F_{\Gamma 1}^x = F_{\Gamma 1}^{*x} + F_{\Gamma 2}^x; \\ F_{\Gamma 1}^y = F_{\Gamma 1}^{*y} + F_{\Gamma 2}^y. \end{cases} \quad (13)$$

У такий самий спосіб отримуємо, що

$$\begin{cases} F_{\Gamma 2}^x = F_{\Gamma 2}^{*x} + F_{\Gamma 3}^x; \\ F_{\Gamma 2}^y = F_{\Gamma 2}^{*y} + F_{\Gamma 3}^y. \end{cases} \quad (14)$$

Узагальнюючи, маємо

$$\begin{cases} F_{\Gamma l}^x = F_{\Gamma l}^{*x} + F_{\Gamma(l+1)}^x; \\ F_{\Gamma l}^y = F_{\Gamma l}^{*y} + F_{\Gamma(l+1)}^y, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases} \quad (15)$$

але для останнього, n -го, вагону —

$$\begin{cases} F_{\Gamma n}^x = F_{\Gamma n}^{*x}; \\ F_{\Gamma n}^y = F_{\Gamma n}^{*y}. \end{cases} \quad (16)$$

З урахуванням співвідношень (15), (16) математичні моделі (2), (3) можна переписати так

$$m_l \frac{dV_l^x}{dt} = F_{\Gamma l}^x(x, y) - F_{\Gamma l}^{*x}(x, y) - F_{\Gamma(l+1)}^x(x, y), \quad l = \overline{1, n-1}; \quad (17)$$

$$m_l \frac{dV_l^y}{dt} = F_{\Gamma l}^y(x, y) - F_{\Gamma l}^{*y}(x, y) - F_{\Gamma(l+1)}^y(x, y), \quad l = \overline{1, n-1}; \quad (18)$$

$$\begin{cases} m_n \frac{dV_n^x}{dt} = F_{\Gamma n}^x(x, y) - F_{\Gamma n}^{*x}(x, y); \\ m_n \frac{dV_n^y}{dt} = F_{\Gamma n}^y(x, y) - F_{\Gamma n}^{*y}(x, y). \end{cases} \quad (19)$$

З рис. 1 видно, що для прямолінійних ділянок залізничної колії будуть справедливими вирази:

$$\frac{dV_1^x}{dt} = \frac{dV_2^x}{dt} = \dots = \frac{dV_l^x}{dt} = \dots = \frac{dV_n^x}{dt}; \quad (20)$$

$$\frac{dV_1^y}{dt} = \frac{dV_2^y}{dt} = \dots = \frac{dV_l^y}{dt} = \dots = \frac{dV_n^y}{dt}, \quad (21)$$

які не виконуються в загальному випадку для закруглень.

Конкретизуємо сили, що входять в праву частину математичних моделей (17), (18), (19).

Відомо [2], що обертальний момент $M_{об}$ на валу тягового електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням, якими комплектуються електроприводи електровозів, можна визначити зі співвідношення

$$M_{об} = k_M I_{Я} \Phi(I_{Я}), \quad (22)$$

в якому $I_{Я}$ — струм якоря, що тече і в обмотці збудження, $\Phi(I_{Я})$ — магнітний потік обмотки збудження, який є функцією струму і визначається з кривої намагнічування, а k_M — коефіцієнт моменту, що визначається через конструктивні параметри електродвигуна та редуктора.

Але очевидно, що для цього ж моменту $M_{об}$ справедливим є й інше

$$M_{об} = F_{T1} r_k. \quad (23)$$

Геометрична інтерпретація зв'язку між силою тяги F_{T1} , яка діє на електровоз, обертальним моментом $M_{об}$, створюваним електродвигуном електропривода, та радіусом r_k колеса електровоза показана на рис. 2.

З виразів (22) та (23) випливає, що

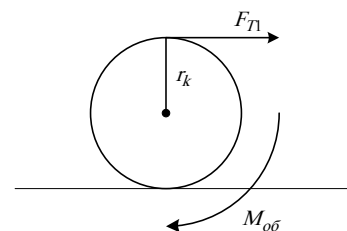


Рис. 2

$$F_{T1} = \frac{k_M}{r_k} I_{Я} \Phi(I_{Я}), \quad (24)$$

а з рис. 1 легко бачити, що

$$F_{T1}^x = \frac{k_M}{r_k} I_{Я} \Phi(I_{Я}) \cos(\alpha(x, y)); \quad (25)$$

$$F_{T1}^y = \frac{k_M}{r_k} I_{Я} \Phi(I_{Я}) \sin(\alpha(x, y)), \quad (26)$$

де під $\alpha(x, y)$ мається на увазі кут нахилу дотичної до графіка залізничної колії в площині її прокладення в точці з координатами (x, y) (рис. 1).

Цілком очевидно, що якщо на електровозі в системі електропривода встановлено 2, 4, 6 чи 8 електродвигунів, то праві частини виразів (25), (26) слід збільшити відповідно у 2, 4, 6 або 8 разів.

Тепер визначимось із силою $F_{\Gamma l}^{(*)}$ та її проекціями на осі x, y .

З механіки [3] відомо, що основною гальмівною силою створюваною вагоном під час прямолінійного руху по горизонтальній площині, є сила тертя кочення F_{ml} , яка визначається як

$$F_{ml} = k \cdot P_l = F_{\Gamma l}(x, y), \quad (27)$$

де P_l — вага l -го вагона, а k — коефіцієнт пропорційності, значення якого залежить від того, з якого матеріалу виготовлено колесо і з якого матеріалу виготовлена поверхня, по якій це колесо котиться.

Якщо ж площина, на якій прокладена залізнична колія, має нахил (рис. 3б, 3в), то гальмівна сила $F_{\Gamma}(x, y)$ дорівнюватиме

— для випадку нахилу (рис. 3б)

$$F(x, y) = k P_l \cos \gamma(x, y) - P_l \sin \gamma(x, y); \quad (28)$$

— для випадку підйому (рис. 3в)

$$F(x, y) = k P_l \cos \gamma(x, y) + P_l \sin \gamma(x, y), \quad (29)$$

де $\gamma(x, y)$ — кут між силою ваги P_l вагона та нормаллю до площини прокладення залізничної колії в точці з координатами (x, y) , до якої прикладена сила ваги.

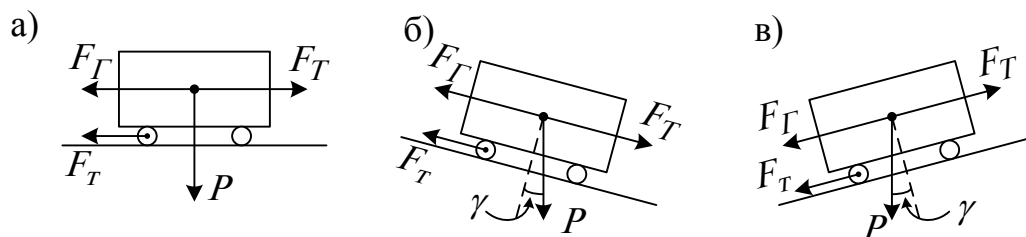


Рис. 3. Сили, що діють на вагон

Очевидно, що проекції гальмівної сили $F_{\Gamma}(x, y)$ на координатні вісі x, y матимуть вигляд

$$F_{\Gamma l}^x(x, y) = k P_l \cos \alpha(x, y); \quad (30)$$

$$F_{\Gamma l}^y(x, y) = k P_l \sin \alpha(x, y) \quad (31)$$

під час руху по горизонтальній площині, або

$$F_{\Gamma l}^x(x, y) = (k P_l \cos \gamma(x, y) - P_l \sin \gamma(x, y)) \cos \alpha(x, y); \quad (32)$$

$$F_{\Gamma l}^y(x, y) = (k P_l \cos \gamma(x, y) - P_l \sin \gamma(x, y)) \sin \alpha(x, y) \quad (33)$$

під час руху по похилій площині, або

$$F_{\Gamma l}^x(x, y) = (k P_l \cos \gamma(x, y) + P_l \sin \gamma(x, y)) \cos \alpha(x, y); \quad (34)$$

$$F_{\Gamma l}^y(x, y) = (k P_l \cos \gamma(x, y) + P_l \sin \gamma(x, y)) \sin \alpha(x, y) \quad (35)$$

під час руху на підйом.

Але оскільки потяг рухається, долаючи також опір повітряної маси, яка рухається зі швидкістю $\vec{V}_{\Pi} = \vec{i}V_{\Pi}^x + \vec{j}V_{\Pi}^y$ під кутом $\phi(x, y)$ до координатної вісі x в діапазоні від $\phi = 0^\circ$ до $\phi = 360^\circ$, то визначаючи гальмівну силу, що діє на вагон, потрібно врахувати і цю складову, яку позначимо $F_{\Gamma l}^n$.

Модифікуючи відомі з механіки положення, що опір повітряного потоку, що набігає на поверхню $S_{Л1}$, пропорційний квадрату швидкості цього повітряного потоку, а опір повітряного потоку, ковзного поверхні $S_{Б1}$, пропорційний швидкості цього повітряного потоку, для електровоза отримуємо:

$$F_{\Gamma l}^{\Pi x}(x, y) = k_1 S_{Л1} \cos \alpha(x, y) (V_1 \cos \alpha(x, y) - V_n \cos \phi(x, y))^2 + k_2 S_{Б1} \cos \alpha(x, y) (V_1 \cos \alpha(x, y) - V_n \cos \phi(x, y)); \quad (36)$$

$$F_{\Gamma l}^{\Pi y}(x, y) = k_1 S_{Л1} \sin \alpha(x, y) (V_1 \sin \alpha(x, y) - V_n \sin \phi(x, y))^2 + k_2 S_{Б1} \sin \alpha(x, y) (V_1 \sin \alpha(x, y) - V_n \sin \phi(x, y)), \quad (37)$$

де $S_{Л1}$, $S_{Б1}$ — площа відповідно лобової та бічної поверхні електровоза.

На рис. 4 показана графічна інтерпретація взаємовпливу швидкості електровоза потягу \vec{V}_1 зі швидкістю повітряного потоку \vec{V}_{Π} для двох векторних напрямків дії \vec{V}_{Π}^* та \vec{V}_{Π}^{**} .

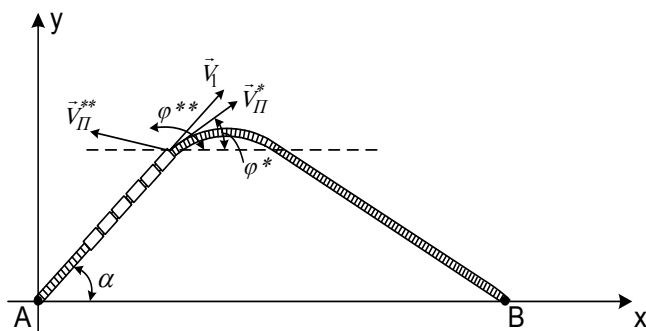


Рис. 4

Очевидно, що квадратні члени в рівняннях (34), (37) присутні лише в моделях електровоза, який лобовою поверхнею врізається в повітряний потік, а в моделях вагонів, приєднаних до електровоза, що рухаються в повітряному коридорі, створеному електровозом, взаємодія з повітряним потоком яких здійснюється лише бічною поверхнею у ковзному режимі, зберігаються лише лінійні по відношенню до швидкостей члени.

Узагальнюючи сказане вище, можна стверджувати, що під час руху потяга

прямолінійними ділянками залізничної колії модель гальмівної сили, що діє на кожний вагон, можна записати у вигляді

$$F_{\Gamma l}^{*x}(x, y) = F_{\Gamma l}^x(x, y) + F_{\Gamma l}^{\Pi x}(x, y); \quad (38)$$

$$F_{\Gamma l}^{*y}(x, y) = F_{\Gamma l}^y(x, y) + F_{\Gamma l}^{\Pi y}(x, y), \quad (39)$$

де складові визначаються виразами (30), (31) або (32), (33) чи (34), (35) і (36), (37).

Але на закругленнях дороги потрібно враховувати ще одну складову гальмівної сили, обумовлену доцентровим прискоренням $\vec{\omega}_i$ кожного вагона, яке породжує доцентрову силу [3]

$$F_{Дl}(x, y) = m_l \frac{V_l^2}{R}, \quad (40)$$

де R — радіус закруглення.

Власне гальмівний ефект створює не сама ця сила тертя $F_{Дl}$, а сила тертя $F_{mДl}$ бокових поясів вагонних коліс, що стикаються з боковими поверхнями рейок, котра створюється силою $(-F_{Дl})$,

яка урівноважує доцентрову силу $F_{Дл}$ на стику бокової стінки колеса з боковою стінкою рейки.

Тож як і сила тертя кочення F_{ml} у виразі (27) визначається через силу ваги P , так і силу тертя бокових стінок колеса l -го вагона і рейки $F_{mДл}(x, y)$ можна визначити через доцентрову силу за допомогою виразу

$$F_{mДл} = k_{Д} F_{Дл}, \quad (41)$$

або

$$F_{mДл} = k_{Д} m_l \frac{V_l^2}{R}. \quad (42)$$

В проекціях на осі x , y моделі цієї сили можна записати у вигляді:

$$F_{mДл}^x(x, y) = k_{Д} m_l \frac{V_l^2}{R} \cos \psi(x, y); \quad (43)$$

$$F_{mДл}^y(x, y) = k_{Д} m_l \frac{V_l^2}{R} \sin \psi(x, y), \quad (44)$$

де $\psi(x, y)$ — це кут між радіусом R , проведеним в точку (x, y) , та позитивним напрямком осі x (рис. 5).

На рис. 5 наведена графічна інтерпретація складових сили тертя, обумовленої доцентровою силою.

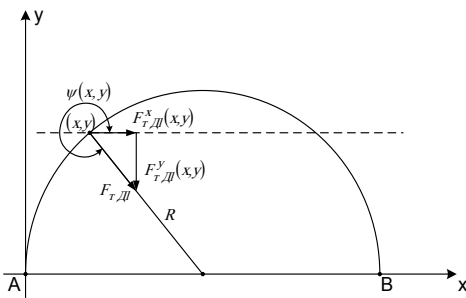


Рис. 5

Отже моделі проекцій гальмівної сили, що діє на l -й вагон, для руху по закругленнях матимуть вигляд:

$$F_{Гл}^{*x}(x, y) = F_{Гл}^x(x, y) + F_{Гл}^{\Pi x}(x, y) + F_{mДл}^x(x, y);$$

$$F_{Гл}^{*y}(x, y) = F_{Гл}^y(x, y) + F_{Гл}^{\Pi y}(x, y) + F_{mДл}^y(x, y).$$

Тепер, коли ми маємо повністю визначені праві частини систем диференціальних рівнянь (17), (18), (19), можна переходити до їх використання в задачах аналізу динаміки та оптимізації БМРДС класу БВПЕТ.

Висновки

Побудовані математичні моделі основних сил, які діють на кожний зв'язаний об'єкт БМРДС класу БВПЕТ. Рівняння динаміки руху електропотяга доведені до вигляду, придатного для використання при розв'язанні задач оптимізації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Б. І. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — № 6. — С. 55—58.
2. Андреев В. П. Основы электропривода / В. П. Андреев, Ю. А. Сабинин. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. — 772 с.
3. Стрелков С. П. Механика / С. П. Стрелков. — М.: Наука, 1965. — 528 с.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті

Надійшла до редакції 12.01.09
Рекомендована до друку 28.01.09

Мокін Борис Іванович — професор, **Мокін Олександр Борисович** — доцент.

Кафедра електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті Вінницького національного технічного університету