УДК 517.518.949

А. Т. Дудикевич, к. фіз-мат. н., доц.;
А. І. Кардаш, к. фіз-мат. н., доц.;
С. М. Левицька

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Просторове рівняння конвекції-дифузії зі змінними коефіцієнтами методом сіток на дев'ятнадцятиточковому шаблоні зводиться до системи різницевих рівнянь, яка розв'язується методами верхньої релаксації за точками та лініями.

Вступ

Числове розв'язування тривимірних задач конвекції-дифузії вимагає значних обчислювальних затрат. Традиційні скінчено-різницеві схеми мають погану збіжність і тому постає питання її покращення. В цій роботі це вирішується таким чином.

Здійснюється апроксимація диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами різницевою схемою четвертого порядку на дев'ятнадцятиточковому шаблоні. В роботах [2, 3], показано, що різницеві схеми четвертого порядку для даної задачі є ефективнішими, ніж традиційні центрально-різницеві схеми другого порядку.

Різницева задача нами розв'язується ітераційними методами верхньої релаксації за точками і за лініями із використанням оптимального параметра релаксації.

Постановка задачі

Задача Діріхле для просторового рівняння конвекції-дифузії записується у вигляді

$$\Delta u(x,y,z)+\left(\lambda(x,y,z),\mu(x,y,z),\phi(x,y,z)\right)\nabla u(x,y,z)=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega; \tag{1}$$

$$u(x,y,z)\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y,z), \tag{2}$$

де функції $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ — задані; $\lambda(x,y,z)$, $\mu(x,y,z)$, $\phi(x,y,z)$ — задані коефіцієнти конвекції; $G=\{0\le x\le L,\ 0\le y\le M,\ 0\le z\le N\}$ — паралелепіпед із сторонами $L,\ M,\ N$; Γ — межа паралелепіпеда, $\overline{G}=G+\Gamma$.

Дану задачу (1)—(2) розв'язуємо методом скінченних різниць. Побудуємо в G сітку $\overline{\omega}_h$ з кроками $h_1=\dfrac{L}{l}$, $h_2=\dfrac{M}{m}$ та $h_3=\dfrac{N}{n}$, де $l,m,n>0$ — цілі числа. Проведемо три сім'ї паралельних прямих $x_i=ih_1,\ i=\overline{0,l};\quad y_j=jh_2;\ j=\overline{0,m};\ z_k=kh_3;\ k=\overline{0,n}.$

Нехай ω_h — множина всіх внутрішніх вузлів сітки. Загальна кількість внутрішніх вузлів сітки дорівнює $(l-1)(m-1)(n-1)$. Множину всіх граничних вузлів позначимо γ_h, а сукупність усіх внутрішніх і граничних позначимо через $\overline{\omega}_h$: $\overline{\omega_h}=\omega_h+\gamma_h$.

Побудова різницевої схеми

На дев'ятнадцятиточковому тривимірному шаблоні (рис. 1) у випадку кубічної сітки різницева схема для задачі (1)—(2) записується у вигляді лінійної комбінації

$$\sum_{k=0}^{18} c_k u_k = F_0, \tag{3}$$

де коефіцієнти c_p $(p=\overline{0,18})$ шукаються методом невизначених коефіцієнтів, а u_p — значення розв’язку у вузлах шаблону.

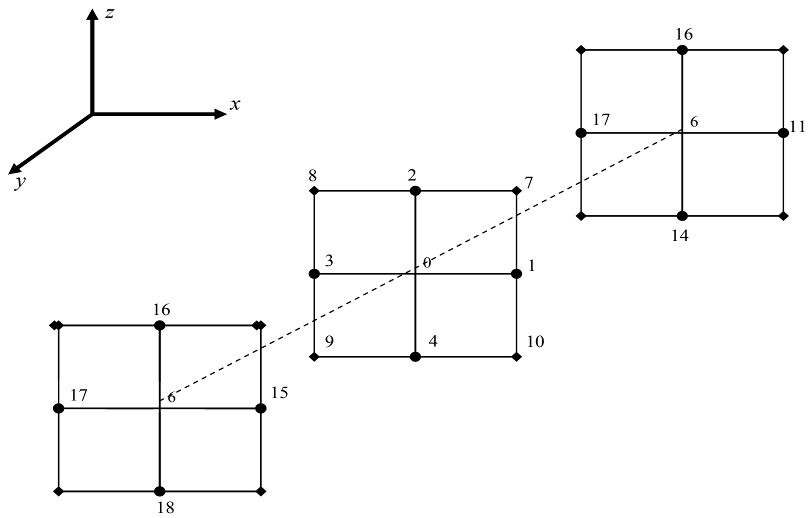

Рис. 1. Дев’ятнадцятиточковий шаблон

Згідно статей [2, 3], для знаходження коефіцієнтів c_p $(p=\overline{0,18})$ невідому функцію $u(x,y,z)$, всі коефіцієнти і праві частини диференціального рівняння (1) розкладаємо в степеневі ряди.

Підставляючи ці розклади в диференціальне рівняння (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x^{q_1}, y^{q_2}, z^{q_3}$, отримаємо коефіцієнти різницевої схеми четвертого порядку апроксимації:

$$c_0=-\left[24+h^2\left(\lambda_0^2+\mu_0^2+\phi_0^2\right)+h\left(\lambda_1-\lambda_3+\mu_2-\mu_4+\phi_5-\phi_6\right)\right],$$

$$c_2=2-\frac{h}{4}\left(2\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\lambda_0^2+\lambda_0\left(\lambda_1-\lambda_3\right)+\mu_0\left(\lambda_2-\lambda_4\right)+\phi_0\left(\lambda_5-\lambda_6\right)\right];$$

$$c_2=2-\frac{h}{4}\left(2\mu_0-\mu_1-3\mu_2-\mu_3+\mu_4-\mu_5-\mu_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\mu_0^2+\lambda_0\left(\mu_1-\mu_3\right)+\mu_0\left(\mu_2-\mu_4\right)+\phi_0\left(\mu_5-\mu_6\right)\right];$$

$$c_3=2+\frac{h}{4}\left(2\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\lambda_0^2-\lambda_0\left(\lambda_1-\lambda_3\right)-\mu_0\left(\lambda_2-\lambda_4\right)-\phi_0\left(\lambda_5-\lambda_6\right)\right];$$

$$c_4=2+\frac{h}{4}\left(2\mu_0-\mu_1+\mu_2-\mu_3-3\mu_4-\mu_5-\mu_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\mu_0^2-\lambda_0\left(\mu_1-\mu_3\right)-\mu_0\left(\mu_2-\mu_4\right)-\phi_0\left(\mu_5-\mu_6\right)\right];$$

$$c_5=2-\frac{h}{4}\left(2\phi_0-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\phi_4-3\phi_5+\phi_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\phi_0^2+\lambda_0\left(\phi_1-\phi_3\right)+\mu_0\left(\phi_2-\phi_4\right)+\phi_0\left(\phi_5-\phi_6\right)\right];$$

$$c_6=2+\frac{h}{4}\left(2\phi_0-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\phi_4+\phi_5-3\phi_6\right)+\frac{h^2}{8}\left[4\phi_0^2-\lambda_0\left(\phi_1-\phi_3\right)-\mu_0\left(\phi_2-\phi_4\right)-\phi_0\left(\phi_5-\phi_6\right)\right];$$

$$c_7=1+\frac{h}{2}\left(\lambda_0+\mu_0\right)+\frac{h}{8}\left(\lambda_2-\lambda_4+\mu_1-\mu_3\right)+\frac{h^2}{4}\lambda_0\mu_0;$$

$$c_8=1-\frac{h}{2}\left(\lambda_0-\mu_0\right)-\frac{h}{8}\left(\lambda_2-\lambda_4+\mu_1-\mu_3\right)-\frac{h^2}{4}\lambda_0\mu_0;$$

$$c_9=1-\frac{h}{2}\left(\lambda_0+\mu_0\right)+\frac{h}{8}\left(\lambda_2-\lambda_4+\mu_1-\mu_3\right)+\frac{h^2}{4}\lambda_0\mu_0;$$

$$c_{10}=1+\frac{h}{2}\left(\lambda_0-\mu_0\right)-\frac{h}{8}\left(\lambda_2-\lambda_4+\mu_1-\mu_3\right)-\frac{h^2}{4}\lambda_0\mu_0;$$

$$c_{11} = 1 + \frac{h}{2}(\lambda_0 + \phi_0) + \frac{h}{8}(\lambda_5 - \lambda_6 + \phi_1 - \phi_3) + \frac{h^2}{4}\lambda_0\phi_0;$$

$$c_{12} = 1 + \frac{h}{2}(\mu_0 + \phi_0) + \frac{h}{8}(\mu_5 - \mu_6 + \phi_2 - \phi_4) + \frac{h^2}{4}\mu_0\phi_0;$$

$$c_{13} = 1 - \frac{h}{2}(\lambda_0 - \phi_0) - \frac{h}{8}(\lambda_5 - \lambda_6 + \phi_1 - \phi_3) - \frac{h^2}{4}\lambda_0\phi_0;$$

$$c_{14} = 1 - \frac{h}{2}(\mu_0 - \phi_0) - \frac{h}{8}(\mu_5 - \mu_6 + \phi_2 - \phi_4) - \frac{h^2}{4}\mu_0\phi_0;$$

$$c_{15} = 1 + \frac{h}{2}(\lambda_0 - \phi_0) - \frac{h}{8}(\lambda_5 - \lambda_6 + \phi_1 - \phi_3) - \frac{h^2}{4}\lambda_0\phi_0;$$

$$c_{16} = 1 + \frac{h}{2}(\mu_0 - \phi_0) - \frac{h}{8}(\mu_5 - \mu_6 + \phi_2 - \phi_4) - \frac{h^2}{4}\mu_0\phi_0;$$

$$c_{17} = 1 - \frac{h}{2}(\lambda_0 + \phi_0) + \frac{h}{8}(\lambda_5 - \lambda_6 + \phi_1 - \phi_3) + \frac{h^2}{4}\lambda_0\phi_0;$$

$$c_{18} = 1 - \frac{h}{2}(\mu_0 + \phi_0) + \frac{h}{8}(\mu_5 - \mu_6 + \phi_2 - \phi_4) + \frac{h^2}{4}\mu_0\phi_0;$$

$$F_0 = \frac{h^2}{2}(6f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) + \frac{h^3}{4}\left[\lambda_0 (f_1 - f)_3 + \mu_0 (f_2 - f_4) + \phi_0 (f_5 - f_6)\right]. \quad (4)$$

Таким чином, в просторовому випадку ми отримали різницеву схему четвертого порядку апроксимації на дев'ятнадцятиточковому шаблоні для диференціального рівняння конвекції-дифузії (1).

На сітці G_h при $i = \overline{1, l-1}$, $j = \overline{1, m-1}$, $k = \overline{1, n-1}$ ми отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(l-1)(m-1)(n-1)$, яку розв'язуємо ітераційними методами верхньої релаксації.

Ітераційні методи верхньої релаксації розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Для побудови ітераційних процесів встановлюємо такий порядок розміщення вузлів: вибрана права трійка системи координат; послідовність циклів — z, y, x (за віссю x — внутрішній цикл). Вважаємо, що точки 6, 15—18 належать $(k-1)$-й площині сітки; точки 0—4, 7—10 належать k-й площині, а точки 5, 11—14 належать $(k+1)$-й площині.

Вводимо такі позначення:

$$u_0 = u(x, y, z) \to u(x_i, y_j, z_k) \to u_{i,j,k};$$

$$u_1 = u_{i+1,j,k}, \ldots, u_4 = u_{i,j+1,k}, \ldots, u_{14} = u_{i,j+1,k+1}; \ldots$$

Ітераційний процес для методу верхньої релаксації за точками запишеться так

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i,j,k}^{(s+1)} = (F_0 - c_1 u_{i+1,j,k}^{(s)} - c_2 u_{i,j-1,k}^{(s+1)} - c_3 u_{i-1,j,k}^{(s+1)} - c_4 u_{i,j+1,k}^{(s)} - c_5 u_{i,j,k+1}^{(s)} - c_6 u_{i,j,k-1}^{(s+1)} - c_7 u_{i+1,j-1,k}^{(s+1)} - \\ \quad - c_8 u_{i-1,j-1,k}^{(s+1)} - c_9 u_{i-1,j+1,k}^{(s)} - c_{10} u_{i+1,j+1,k}^{(s)} - c_{11} u_{i+1,j,k+1}^{(s)} - c_{12} u_{i,j-1,k+1}^{(s)} - c_{13} u_{i-1,j,k+1}^{(s)} - \\ \quad - c_{14} u_{i,j+1,k+1}^{(s)} - c_{15} u_{i+1,j,k-1}^{(s+1)} - c_{16} u_{i,j-1,k-1}^{(s+1)} - c_{17} u_{i-1,j,k-1}^{(s+1)} - c_{18} u_{i,j+1,k-1}^{(s+1)}) \,/\, c_0; \\ u_{i,j,k}^{(s+1)} = \omega_t \tilde{u}_{i,j,k}^{(s+1)} + (1-\omega_t) u_{i,j,k}^{(s)}, \; i = \overline{1,l}; \quad j = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,n}; \quad t = 0, 1, \ldots, \end{cases} \quad (5)$$

де s — номер ітерації, ω_t — параметр верхньої релаксації, який визначають за формулою

$$\omega_{t+1} = 2 \Bigg/ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\left(\lambda_{\max}^{(t)} + \omega_t - 1\right)^2}{\lambda_{\max}^{(t)} \omega_t^2}}\right), \quad (6)$$

де $\lambda_{\max}^{(t)}$ — максимальне за модулем власне число матриці системи (3).

Задавши довільне початкове наближення $u_{i,j,k}^{(0)}$ у внутрішніх вузлах сітки, проводимо декілька ітерацій з $\omega_t = 1$ (тобто за методом Зейделя), потім циклічно обчислюємо

$$\lambda_{\max}^{(s+1)} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i,j,k}\left(u_{i,j,k}^{(s+1)} - u_{i,j,k}^{(s)}\right)^2}{\sum\limits_{i,j,k}\left(u_{i,j,k}^{(s)} - u_{i,j,k}^{(s-1)}\right)^2}} \tag{7}$$

до виконання умови

$$\left|\frac{\lambda_{\max}^{(s+1)}}{\lambda_{\max}^{(s)}} - 1\right| \le \varepsilon_1, \tag{8}$$

де ε_1 — мала задана величина.

Знайшовши з (7)—(8) власне число $\lambda_{\max}^{(s+1)}$, продовжуємо ітераційний процес за методом верхньої релаксації за точками до виконання умови

$$\left|u^{(s+1)} - u^{(s)}\right| < \varepsilon$$

для всіх внутрішніх вузлів сітки.

Ітераційний процес верхньої релаксації за лініями записується так:

$$\begin{cases} c_3\tilde{u}_{i+1,j,k}^{(s+1)} + c_0\tilde{u}_{i,j,k}^{(s+1)} + c_1\tilde{u}_{i-1,j,k}^{(s+1)} = F_0 - c_2u_{i,j-1,k}^{(s+1)} - c_4u_{i,j+1,k}^{(s)} - c_5u_{i,j,k+1}^{(s)} - c_6u_{i,j,k-1}^{(s+1)} - \\ -c_7u_{i+1,j-1,k}^{(s+1)} - c_8u_{i-1,j-1,k}^{(s+1)} - c_9u_{i-1,j+1,k}^{(s)} - c_{10}u_{i+1,j+1,k}^{(s)} - c_{11}u_{i+1,j,k+1}^{(s)} - c_{12}u_{i,j-1,k+1}^{(s)} - \\ -c_{13}u_{i-1,j,k+1}^{(s)} - c_{14}u_{i,j+1,k+1}^{(s)} - c_{15}u_{i+1,j,k-1}^{(s+1)} - c_{16}u_{i,j-1,k-1}^{(s+1)} - c_{17}u_{i-1,j,k-1}^{(s+1)} - c_{18}u_{i,j+1,k-1}^{(s+1)}; \\ u_{i,j,k}^{(s+1)} = \omega_t\tilde{u}_{i,j,k}^{(s+1)} + (1-\omega_t)u_{i,j,k}^{(s)},\ i = \overline{1,l};\quad j = \overline{1,m};\quad k = \overline{1,n};\qquad t = 0,1,\ \ldots, \end{cases} . \tag{9}$$

де перша формула в (9) реалізується методом правої прогонки.

Таким чином, для розв’язування різницевої задачі рівняння конвекції-дифузії побудовані ітераційні процеси методів верхньої релаксації.

В роботах [4—5] показана суттєва перевага ітераційних методів верхньої релаксації за точками і лініями порівняно з методами простих ітерацій та Зейделя при розвязуванні плоских граничних задач для рівнянь Пуассона і конвекції-дифузії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самарский А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. , 1999. — 248 с.

2. Jun Zhang. An explicit fourth-order compact finite difference scheme for three dimensional convection-diffusion equation / Jun Zhang // Department of computer science and engineering, University of Minnesota, 1996.

3. Jun Zhang. On convergence of iterative methods with a fourth-order compact scheme / Jun Zhang // Department of computer science and engineering. — Minnesota, 1997. — Applied Mathematics Letter 10.

4. Чисельне розв’язування плоскої граничної задачі Діріхле для рівняння конвекції-дифузії методом сіток / Матеріали Xlll Міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006), Вінниця, 25—28 вересня 2006 р. — Вінниця : Універсум–Вінниця, 2006. — С. 20—24.

5. Дудикевич А. Т. Чисельне розв’язування плоскої та осесиметричної задач Діріхле для рівняння Пуассона у випадку складних областей : навч. посіб. / А. Т.Дудикевич. — Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2001. — 101с.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Надійшла до редакції 21.10.08
Рекомендована до друку 20.11.08

Дудикевич Анна Теодорівна — доцент кафедри обчислювальної математики;
Кардаш Андрій Іванович — доцент, ***Левицька Софія Михайлівна*** — старший викладач.

Кафедра програмування.

Львівський національний університет імені Івана Франка