

# РАДІОЕЛЕКТРОНІКА ТА РАДІОЕЛЕКТРОННЕ АПАРАТОБУДУВАННЯ

УДК.681.325

В. М. Кичак<sup>1</sup>  
В. В. Кичак<sup>1</sup>

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДУ ДЖОЗЕФСОНА

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

*Запропонована математична модель переходу Джозефсона, яка дає можливість визначити залежність різниці фаз хвильових функцій від параметрів еквівалентної схеми. Показано, що розв'язок диференціального рівняння, яке описує фізичні процеси в переході Джозефсона, може бути представлений степеневим рядом і доведена його збіжність. Отримано загальний вираз для визначення коефіцієнтів цього ряду. Отримано вирази для визначення різниці фаз хвильової функції та напруги на джозефсонівському переході. Досліджена залежність різниці фаз хвильових функцій від параметрів елементів еквівалентної схеми та струму, що тече через перехід.*

**Ключові слова:** перехід Джозефсона, хвильова функція, високотемпературна надпровідність, критичний струм переходу Джозефсона, кругова частота генерації переходу Джозефсона.

### Вступ

Прогрес сучасних цифрових технологій значною мірою пов'язаний з розвитком надпровідних цифрових пристроїв на базі швидкої одноквантової логіки, для побудови якої використовуються явище надпровідності та джозефсонівські переходи. Вкрай низька величина енергії перемикання джозефсонівських елементів та їх висока швидкодія дає можливість використовувати тактові частоти для низькотемпературних надпровідників до 100 ГГц, а для високотемпературних надпровідників — до одиниць ТГц, що дозволяє одночасно нарощувати як швидкодню, так і ступінь інтеграції надпровідних цифрових пристроїв [1].

Застосовуючи макроскопічні квантові ефекти у надпровідниках, можна створювати високочутливі швидкодіючі АЦП і ЦАП, що дає можливість розробляти повністю цифрові пристрої, які здійснюють приймання, обробку та передавання сигналів для сучасних телекомунікаційних систем в гігагерцовому та терагерцовому діапазоні частот [2].

Так, зі застосуванням джозефсонівських переходів в схемах параметричних підсилювачів можна отримати чутливість пристроїв, близьку до квантової межі на частотах від одиниць до сотень ГГц. Змішувачі частоти на базі тунельних джозефсонівських переходів не мають собі рівних за шумовою температурою в діапазоні частот до 1 ТГц і такі змішувачі вже використовуються [3].

Тому розробка математичних моделей переходів Джозефсона, які є елементною базою для побудови таких пристроїв, є актуальною задачею.

### Постановка задачі досліджень

Для розрахунку пристроїв на базі переходів Джозефсона необхідно використовувати їх математичні моделі, які описують залежність струмів і напруг від параметрів надпровідникових матеріалів та діелектричних шарів, що їх розділяють.

Питанням побудови математичних моделей переходів Джозефсона розглянуті у працях [4, 5]. Проте, у відомих працях більше уваги приділяється розрахунку вольт-амперної характеристики таких переходів і не враховується залежність фази хвильової функції та вихідної напруги від електростатичної ємності переходу, або ж використовуються чисельні методи розв'язання диференціального рівняння, які описують зміну струму у разі зміни напруги та параметрів еквівалентної схеми. Тому, завдання цієї праці полягає в розробці моделі, яка б дала можливість отримати аналіти-

чнущу залежність фази хвильової функції та вихідної напруги на джозефсонівському переході від струму, ємності переходу та активного опору.

### Результати досліджень

Еквівалентна схема переходу Джозефсона показана на рис. 1.

Струм, який тече через перехід Джозефсона, можна визначити так [4]:

$$I = I_0 \sin \Phi + (G_0 + G_{III})U + C \frac{dU}{dt}, \quad (1)$$

де  $I_0$  — критичний струм Джозефсона;  $C$  — електростатична ємність двох надпровідників;  $G_0$  — нелінійна провідність переходу Джозефсона;  $G_{III}$  — шунтувальна провідність зовнішнього кола;  $\Phi = \phi_1 - \phi_2$  — різниця фаз хвильових функцій;  $\phi_1$  — фаза хвильової функції в надпровіднику 1;  $\phi_2$  — фаза хвильової функції в надпровіднику 2.

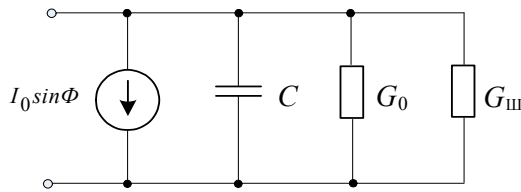


Рис. 1. Еквівалентна схема переходу Джозефсона

Оскільки 
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2q}{\hbar} U, \quad (2)$$

то 
$$\frac{dU}{dt} = \frac{\hbar}{2q} \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2}.$$

Із виразу (2) можна визначити залежність фази від прикладеної напруги

$$\Phi = \frac{2qU}{\hbar} \cdot t + \text{const}.$$

З урахуванням вищевказаних співвідношень вираз (1) можна переписати так:

$$I = I_0 \sin \Phi + \frac{(G + G_{III})\hbar}{2q} \cdot \frac{d\Phi}{dt} + \frac{C\hbar}{2q} \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2}.$$

Розділимо праву і ліву частини на  $I_0$ :

$$\frac{I}{I_0} = \sin \Phi + \frac{G\hbar}{2qI_0} \cdot \frac{d\Phi}{dt} + \frac{C\hbar}{2qI_0} \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2}. \quad (3)$$

Введемо заміни

$$x = \frac{2qI_0 t}{\hbar G} = \omega_0 t, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{2q}{\hbar} \cdot \frac{I_0}{G} \cdot \frac{C}{G} = \omega_0 \frac{C}{G} \text{ (фактор Мак-Камбера)}, \quad (5)$$

де  $\omega_0 = \frac{2q}{\hbar} \cdot \frac{I_0}{G}$  — кругова частота переходу Джозефсона, яка відповідає частоті генерації напруги у разі протікання через резистор з провідністю  $G$  максимального струму.

З урахуванням введених заміни вираз (3) можна переписати у вигляді:

$$\frac{I}{I_0} = \sin \Phi + \frac{d\Phi}{dx} + \beta \frac{d^2\Phi}{dx^2}.$$

Розділивши праву і ліву частини на  $\beta$ , отримаємо:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\Phi}{dx} + \left( \frac{\sin \Phi}{\beta} - \frac{I}{I_0 \beta} \right) = 0. \quad (6)$$

Враховуючи (4) і (5), визначимо  $\beta$  через  $x$ :

$$\beta = \frac{x}{t} \cdot \frac{C}{G}.$$

З урахуванням цього, вираз (6) можна переписати таким чином:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{a}{x} \cdot \frac{d\Phi}{dx} + \frac{a}{x} \left( \sin\Phi - \frac{I}{I_0} \right) = 0, \quad (7)$$

де  $a = \frac{tG}{C}$ .

Це диференціальне рівняння по формі має вигляд подібний рівнянню Бесселя [6]. Якщо  $x = 0$ , коефіцієнт при першій похідній і при нелінійному членові прямує до нескінченності, тобто має місце розрив. В цьому випадку не можна наперед сказати, чи існує розв'язок рівняння коли  $x = 0$ . Тобто теорема про існування єдиного розв'язку тут не може бути використана. Рівняння (7) не належить ні до одного із типів рівнянь другого порядку і тому під час його розв'язання будемо розглядати два випадки:

- перший випадок відповідає умові, коли  $\Phi$  набуває малих значень і  $\sin\Phi \approx \Phi$ ;
- другий випадок відповідає умові, коли  $\Phi$  набуває великих значень і потрібно врахувати  $\sin\Phi$ .

В цій роботі розглядається лише перший випадок. Для першого випадку рівняння (7) можна переписати так:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{a}{x} \cdot \frac{d\Phi}{dx} + \frac{a}{x} \left( \Phi - \frac{I}{I_0} \right) = 0. \quad (8)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді ряду

$$\Phi = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n + \dots \quad (9)$$

Продиференціювавши цей ряд двічі і підставивши ці значення в диференційне рівняння (8), отримаємо

$$\begin{aligned} & 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \\ & + \frac{a}{x} (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots) + \\ & + \frac{a}{x} \left( C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n - \frac{I}{I_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Це рівняння можна переписати у вигляді

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2} + \frac{a}{x} \sum_{n=1}^{\infty} nC_nx^{n-1} + \frac{a}{x} \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n - \frac{a}{x} \cdot \frac{I}{I_0} = 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при всіх степенях  $x$ , отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів  $C_0, C_1, C_2, \dots$

Якщо допустити, що  $C_0 = 0$ , то вираз для визначення коефіцієнтів можна записати так:

$$C_n = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}C_1}{n! \prod_{n=1}^{n-1} [a + (n-1)]}. \quad (11)$$

Підставляючи значення коефіцієнтів (11) у вираз (9), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi &= C_1 \left[ x - \frac{ax^2}{2(1+\alpha)} + \frac{\alpha^2x^3}{3!(1+\alpha)(2+\alpha)} - \frac{\alpha^3x^4}{4!(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} + (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}x^n}{n! \prod_{n=1}^{n-1} [a + (n-1)]} \right] \\ &= C_1 (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}x^n}{n! \prod_{n=2}^{n-1} [a + (n-1)]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки розв’язок диференціального рівняння отримано у вигляді ряду, то необхідно дослідити його на збіжність. Для цього будемо використовувати ознаку Даламбера. Визначимо відношення абсолютних величин двох послідовних членів ряду, як це зроблено в [6]

$$\frac{C_1 \alpha^{n+1-1} x^{n+1}}{(n+1)! \prod_{n=2}^{n+1-1} [a+(n+1-1)]} : \frac{C_1 \alpha^{n-1} x^n}{n! \prod_{n=2}^{n-1} [a+(n-1)]} = \frac{\alpha x}{n[a+(n-1)]}.$$

Із останнього виразу випливає, що за будь-якого значення  $x$  відношення двох послідовних членів ряду прямує до нуля, якщо  $n \rightarrow \infty$ , що і доводить абсолютну збіжність ряду.

Таким чином, вираз для фази хвильової функції переходу Джозефсона можна записати так:

$$\Phi(x) = C_1 \sum_{n=\varphi}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1} x^n}{n! \prod_{n=2}^{n-1} [a+(n-1)]}. \tag{13}$$

З урахуванням (12), вираз для визначення напруги на джозефсонівському переході має вигляд

$$U(x) = \frac{\hbar}{2gt} \cdot \frac{I}{I_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1} x^n}{n! \prod_{n=2}^{n-1} [a+(n-1)]}. \tag{14}$$

Слід зазначити, що для  $n < 2$  добуток  $n! \prod_{n=2}^{n-1} [a+(n-1)]$  можна вважати рівним 1.

Якщо винести  $a$  за знак суми та підставити його значення в (14), отримаємо:

$$U(x) = \frac{I}{\omega_0 C} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{n-2} x^n}{n! \prod_{n=2}^{n-1} [a+(n-1)]}.$$

Використовуючи вираз (13), розраховано залежність фази хвильової функції від параметрів еквівалентної схеми переходу Джозефсона — електростатичної ємності, нелінійного та шунтувального опорів і струму. Вихідні дані для розрахунку вибирались таким чином:  $I_0 = 10^{-5}$  А,  $G = 10^{-2}$  см,  $C = 10^{-3} \dots 10^{-4}$  пФ,  $I = 5 \cdot 10^{-6}$  А.

Графік залежності приведенного значення різниці фаз хвильових функцій від ємності переходу Джозефсона для різних значень струмів показаний на рис. 2.

Як видно з графіка, різниця фаз хвильової функції при зміні ємності на порядок змінюється не більше ніж на  $20^\circ$ , і тому в цьому діапазоні зміни ємності можна допускати, що  $\sin \Phi \approx \Phi$ , та використовувати вираз (19) для розрахунків пристроїв на переходах Джозефсона. Збільшення струму, який тече через перехід, приводить до збільшення різниці фаз хвильових функцій.

Наведені значення різниці фаз хвильових функцій розраховувались за виразом  $\Delta\phi = \Phi - \Phi_{\text{сер}}$ , і тому вони можуть бути як додатними, так і від’ємними в залежності від вибору  $\Phi_{\text{сер}}$ .

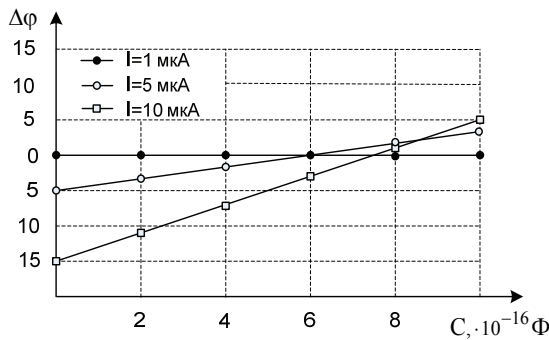


Рис. 2. Залежність різниці фаз хвильових функцій від ємності переходу Джозефсона

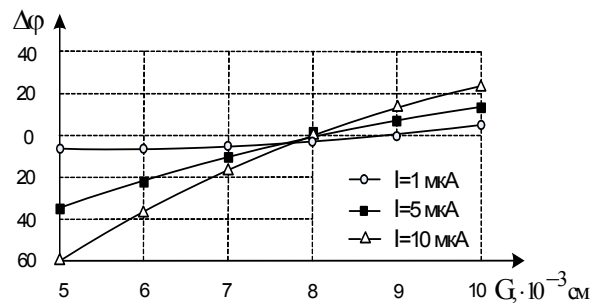


Рис. 3. Залежність різниці фаз хвильових функцій від провідності переходу Джозефсона

На рисунку 3 показано залежність різниці фаз хвильових функцій від провідності переходу Джозефсона для різних значень струмів, що протікають через перехід.

Як впливає із графіків, різниця фаз хвильових функцій зростає зі зменшенням провідності та зі збільшенням струму. За величини струму більше 5 мкА різниця фаз хвильових функцій суттєво зростає, і отриманий вираз для розрахунку пристроїв на базі переходів Джозефсона використовувати недоцільно. Коли провідності менші  $10^{-2}$  см, розроблену вище модель також використовувати недоцільно.

З використанням запропонованої моделі виконані розрахунки залежності змінної напруги на переході від параметрів еквівалентної схеми переходу Джозефсона, які показали, що її величина має такий самий порядок, як і експериментальні результати, наведені у відомих працях вітчизняних та зарубіжних авторів.

### Висновки

1. Розроблено математичну модель переходу Джозефсона, яка дає можливість розрахувати залежність фази хвильової функції від параметрів еквівалентної схеми переходу та визначити оптимальні розміри діелектричного шару для отримання необхідної різниці фаз хвильових функцій та величини змінного струму.

2. Розрахунки різниці фаз хвильових функцій показали, що запропоновану модель доцільно використовувати у випадках, коли струми приблизно вдвічі менші критичних і відносно високі провідності переходів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Тиханский М. В. Моделирование процессов коммутации в джозефсоновских элементах логики «И» и «ИЛИ» / М. В. Тиханский, Р. Р. Крысько // Физика низких температур. — 2013. — Т. 39, № 2. — С. 127—133.
2. Корнев В. К. Исследование динамических процессов в джозефсоновских устройствах сверхпроводниковой электроники : автореф. дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук / В. К. Корнев. — М. : 2007 — 38 с.
3. Гармонический смеситель на туннельном переходе сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник / [К. В. Калашников, А. В. Худченко, А. Б. Барышев, В. П. Кошелен] // Радиотехника и электроника. — 2011. — Т. 56, № 8. — С. 1—9.
4. Сучано Т. Введение в микроэлектронику : пер. с яп. / Т. Сучано, Т. Икома, Е. Такэиси. — М. : Мир, 1988. — 320 с.
5. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах / М: Букингем. — М. : Мир, 1986. — 399 с.
6. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. — М. : Наука. — 1969. — 288 с.

Рекомендована кафедрою телекомунікаційних систем і телебачення ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 19.02.2014

**Кичак Василь Мартинович** — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри телекомунікаційних систем і телебачення, e-mail: vvkychak@gmail.com;

**Кичак Володимир Васильович** — аспірант кафедри телекомунікаційних систем і телебачення.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

V. M. Kychak<sup>1</sup>  
V. V. Kychak<sup>1</sup>

## Mathematical model of Josephson junction

<sup>1</sup>Vinnnytsia National Technical University

*The proposed mathematical model of the Josephson juncture allows defining the dependence of wave functions phase difference on equivalent circuit parameters. It has been shown that the solution of the differential equation, describing physical processes in the Josephson juncture may be described as power-law series, its convergence has been proved. The general equation for defining the series coefficients has been obtained. The equations for defining the wave function phase difference and Josephson juncture voltage have been obtained. The dependence of wave functions phase difference on equivalent circuit parameters and juncture current has been examined.*

**Keywords:** Josephson juncture, wave function, high-temperature super conductivity, critical current of Josephson juncture, circular oscillation frequency of Josephson juncture.

**Kychak Vasyl M.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Telecommunication Systems and Television, e-mail: vvkychak@gmail.com.;

**Kychak Volodymyr V.** — Post-Graduate Student of the Chair of Telecommunication Systems and Television.

**В. М. Кичак<sup>1</sup>**  
**В. В. Кичак<sup>1</sup>**

## **Математическая модель перехода Джозефсона**

<sup>1</sup>Винницкий национальный технический университет

*Предложенная математическая модель перехода Джозефсона дает возможность определить зависимость разности фаз волновых функций от параметров эквивалентной схемы. Показано, что решение дифференциального уравнения, которое описывает физические процессы в переходе Джозефсона, может быть представлено степенным рядом и доказана его сходимость. Получено общее выражение для определения коэффициентов этого ряда. Получены выражения для определения разности фаз волновой функции и напряжения на джозефсоновском переходе. Исследована зависимость разности фаз волновых функций от параметров элементов эквивалентной схемы и тока, протекающего через переход.*

**Ключевые слова:** переход Джозефсона, волновая функция, высокотемпературная сверхпроводимость, критический ток перехода Джозефсона, круговая частота генерации Джозефсона.

**Кичак Василий Мартынович** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой телекоммуникационных систем и телевидения, e-mail: vvkychak@gmail.com;

**Кичак Владимир Васильевич** — аспирант кафедры телекоммуникационных систем и телевидения