

І. Г. Яловега¹
А. О. Федосєєнко¹

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МАРКІВСЬКІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ВІДНОВЛЕННЯ ЛЮДИНО-МАШИННО-СЕРЕДОВИЩНИХ СИСТЕМ З ПІДСИСТЕМОЮ ЗАХИСТУ

¹Харківський національний університет радіоелектроніки

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю підвищення ефективності математичного моделювання процесів відновлення складних людино-машинно-середовищних систем, що функціонують у післяаварійних режимах та характеризуються наявністю швидкодіючих підсистем захисту і різних часових масштабів перебігу деградаційних та відновлювальних процесів. Традиційні марківські моделі безперервного часу не завжди дозволяють адекватно враховувати багатомасштабну структуру динаміки таких систем, що зумовлює необхідність застосування сингулярно збурених стохастичних моделей.

Метою статті є розроблення сингулярно збуреної марківської моделі процесів відновлення людино-машинно-середовищної системи з підсистемою захисту та дослідження її асимптотичних властивостей з урахуванням різних часових масштабів функціонування підсистем.

Методологічною основою дослідження є апарат марківських процесів безперервного часу, методи асимптотичного аналізу сингулярно збурених систем, рівняння Колмогорова та підходи до агрегування станів багатомасштабних стохастичних моделей. У роботі запропоновано подання матриці інтенсивностей переходів у вигляді суми швидкої та повільної складових з введенням малого параметра, що характеризує співвідношення часових масштабів функціонування підсистем захисту та технічної системи.

Розроблено узагальнену сингулярно збурену марківську модель процесів післяаварійного відновлення людино-машинно-середовищної системи, яка дозволяє врахувати взаємодію технічної підсистеми, оператора та підсистеми захисту в єдиному стохастичному просторі станів. Отримано агреговану матрицю переходів редукованої моделі та показано можливість визначення стаціонарних характеристик функціонування системи, зокрема коефіцієнта готовності, середнього часу відновлення та імовірності перебування системи у критичному стані.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у побудові сингулярно збуреної марківської моделі процесів відновлення людино-машинно-середовищних систем із підсистемою захисту, що дозволяє врахувати багатомасштабну структуру процесів функціонування та виконати редукцію простору станів без втрати точності опису післяаварійної динаміки системи.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості застосування запропонованої моделі для оцінювання показників надійності та готовності складних технічних систем критичної інфраструктури, а також для аналізу ефективності функціонування підсистем захисту в умовах аварійних режимів.

Ключові слова: сингулярно збурені системи, марківські процеси безперервного часу, людино-машинно-середовищні системи, процеси відновлення технічних систем, підсистема захисту, багатомасштабні стохастичні моделі, математичне моделювання складних систем, диференційні рівняння, нейромножини, нечіткі множини.

Вступ

Сучасні складні технічні системи функціонують в умовах високої складності структури взаємодії між технічними компонентами, оператором та зовнішнім середовищем. До таких систем належать енергетичні комплекси, транспортні системи, автоматизовані виробничі лінії, системи керування технологічними процесами та інші об'єкти критичної інфраструктури. Однією з характерних особливостей функціонування зазначених систем є наявність швидкодіючих підсистем захисту, які



забезпечують локалізацію аварійних режимів і стабілізацію параметрів системи.

У післяаварійних режимах поведінки людино-машинно-середовищних (Л-М-С) систем визначається складною взаємодією процесів деградації технічних компонентів, відновлення працездатності системи, дій оператора та впливів зовнішнього середовища. Водночас характерною особливістю таких процесів є наявність різних часових масштабів функціонування підсистем. Підсистема захисту реагує на небезпечні відхилення значно швидше, ніж відбуваються процеси деградації та відновлення системи, що зумовлює необхідність застосування сингулярно збурених математичних моделей.

Традиційні марківські моделі не дозволяють у повному обсязі врахувати багатомасштабність процесів функціонування складних систем. Тому актуальною є задача розроблення сингулярно збурених марківських моделей процесів відновлення Л-М-С систем з підсистемою захисту, які забезпечують можливість адекватного опису швидких і повільних процесів функціонування системи.

Проблематика математичного моделювання складних технічних систем, зокрема систем з відновленням, резервуванням, аварійними переходами та багатомасштабною динамікою, посідає важливе місце в сучасному системному аналізі, теорії надійності та стохастичному моделюванні. Однією із базового теоретичного підґрунтя для дослідження таких систем є теорія стохастичних процесів і марківських ланцюгів безперервного часу, фундаментальний внесок у розвиток якої зробили С. Росс, Г. Їнь та Ц. Чжан. У працях С. Росса узагальнено класичний апарат стохастичних процесів і показано його придатність для опису випадкових переходів між станами технічних систем [1]. У монографії Г. Їня і Ц. Чжана марківські процеси безперервного часу розглянуто вже у двомасштабній постановці, що є особливо важливим для систем, де одночасно присутні швидкі та повільні переходи [2]. Надійнісна інтерпретація таких процесів детально розвинена в роботі К. Тріведі та А. Боббіо, де марківські моделі застосовано до аналізу ремонтпридатних систем, показників готовності, відмовостійкості та відновлюваності складних технічних об'єктів [3]. Поглиблення цього напрямку пов'язане також із напівмарківськими моделями, які у праці Н. Лімніоса і Г. Опрішана розглянуто як гнучкіший інструмент опису процесів відновлення та деградації, коли тривалість перебування у станах не підпорядковується експоненційному закону [4].

Подальший розвиток моделей складних технічних систем безпосередньо пов'язаний з урахуванням різних часових масштабів, що характерно для людино-машинно-середовищних систем з підсистемами захисту. Теоретичну основу такого підходу сформували А. Самойленко та М. Перестюк, які розробили методи аналізу сингулярно збурених диференціальних систем і довели можливість редукції повної моделі до зведеної за наявності малого параметра [5]. Ця ідея виявилася методологічно надзвичайно важливою для технічних систем, у яких автоматичні захисні механізми спрацьовують значно швидше, ніж змінюються параметри основної системи або відбувається відновлення після аварії. Саме тому поєднання марківського опису з асимптотичними методами сингулярних збурень нині розглядається як один із найперспективніших підходів до моделювання післяаварійної динаміки [2], [5].

Суттєвий внесок у розвиток цього напрямку зробили й українські вчені. Зокрема В. Королюк у главі про процеси марківського відновлення в задачах надійності показав, що марківсько-відновлювальні схеми є природним інструментом дослідження систем з відмовами та ремонтом [6]. У спільній монографії В. Королюка та Н. Лімніоса розвинуто підхід до стохастичної апроксимації систем зі зміною фазового простору, що має безпосередній зв'язок із задачами агрегування станів і асимптотичного спрощення багатокомпонентних моделей [7]. У новішій роботі С. Семенюка та Я. Чабанюка досліджено асимптотичну поведінку стохастичних еволюційних систем з марківсько-модульованими пуассонівськими збуреннями; автори будують граничний генератор процесу та доводять слабку збіжність до усередненої моделі, що підтверджує актуальність асимптотичних схем для систем із перемиканням режимів [8]. Для прикладного інженерного підґрунтя важливою є також праця В. Грібова, Г. Марінченка, В. Стрельникова та О. Кожохіної, у якій систематизовано показники надійності, моделі відмов і методи розрахунку для систем авіоніки, тобто технічних систем, де роль швидкодійних захистів і операторських рішень є принциповою [9].

Окремий блок сучасних досліджень стосується включення людського фактора в моделі надійності складних систем. У роботі Р. Патріарки, Ф. Ді Гравіо, Ф. Костантіно та ін. узагальнено інтелектуальну структуру Human Reliability Analysis і показано, що сучасні соціотехнічні системи потребують урахування не лише технічних відмов, а й когнітивних, організаційних і процедурних чинників, які визначають імовірність операторської помилки [10]. Цей висновок підтримано й у новому звіті ІАЕА, де підкреслено, що HRA має інтегруватися у загальну архітектуру оцінювання безпеки та ризику для технічних систем підвищеної відповідальності [11]. Отже, сучасний підхід до

моделювання Л-М-С систем вимагає розглядати підсистему захисту, технічну підсистему та оператора як взаємопов'язані компоненти єдиного динамічного процесу [10], [11].

У прикладних роботах останніх років спостерігається активний розвиток методів динамічного аналізу надійності складних систем. Е. Зіо наголошує, що сучасна оцінка ризику відходить від статичних схем і переходить до динамічних, даних-орієнтованих та сценарних моделей, які враховують еволюцію аварійних процесів у часі [12]. У дослідженні Д.-Й. Янга та Ц.-Х. Ву побудовано марківську модель ремонтпридатної резервованої системи з недосконалим перемиканням і відновленням; автори отримали часові характеристики готовності та надійності, що підтверджує ефективність диференціально-марківських схем для опису процесів ремонту та відновлення [13]. У статті С. Паня, Х. Чена, А. Шеня, Д. Чжао та С. Су запропоновано метод оцінювання надійності складних систем на основі неоднорідних марківських процесів; автори спеціально акцентують увагу на подоланні проблеми «вибуху простору станів», яка є однією з головних перешкод для побудови моделей великої розмірності [14]. Таким чином, сучасні роботи підтверджують доцільність поєднання марківського апарату з методами агрегування, спрощення і багатомасштабного аналізу [12]–[14].

Паралельно розвиваються моделі, що описують динамічну логіку аварійних сценаріїв і поведінку захисних механізмів у складних технічних комплексах. Н. Хакзад показав можливості динамічних байєсівських мереж для аналізу ризику доміно-ефектів у хімічних інфраструктурах [15], а М. Ніл і Д. Маркес довели ефективність байєсівських мереж для моделювання доступності ремонтпридатних систем [16]. У роботі Г. Манно, Ф. К'яккіо, Л. Компаньйо, Д. Д'Урсо та Н. Трапані запропоновано формалізацію ремонтпридатних динамічних дерев відмов, що дозволяє враховувати часову послідовність і взаємозалежність аварійних подій [17]. Узагальнюючи сучасний стан досліджень, А. Лає та ін. у 2024 р. зазначають, що сучасний probabilistic safety assessment дедалі більше орієнтується на інтеграцію динамічних моделей, цифрового моніторингу та нових інструментів сценарного аналізу [18]. Це безпосередньо підводить до необхідності розроблення саме сингулярно збурених марківських моделей для процесів відновлення Л-М-С систем з підсистемою захисту, оскільки наявні підходи або зосереджуються переважно на технічній складовій, або не враховують достатньо повно багатомасштабність взаємодії оператора, захисту та основної системи [11]–[18]. Отже, аналіз наукових джерел свідчить, що в сучасній літературі сформовано потужне теоретичне підґрунтя для дослідження марківських і напівмарківських моделей, асимптотичних методів, динамічного аналізу ризику та надійності ремонтпридатних систем. Водночас питання побудови цілісних сингулярно збурених марківських моделей процесів відновлення саме людино-машинно-середовищних систем з підсистемою захисту, які одночасно враховують швидкі захисні переходи, повільну деградацію, операторські дії та можливість агрегування станів, залишається недостатньо опрацьованим і потребує подальшого розвитку.

Метою роботи є розроблення сингулярно збуреної марківської моделі процесів відновлення людино-машинно-середовищних систем з підсистемою захисту та дослідження її асимптотичних властивостей у післяаварійних режимах функціонування.

Результати дослідження

Людино-машинно-середовищна система (Л-М-С) розглядається як складна динамічна стохастична система, функціонування якої визначається взаємодією трьох взаємопов'язаних підсистем: технічної підсистеми, оператора та підсистеми захисту. Такий підхід відповідає сучасній концепції аналізу надійності соціотехнічних систем, у яких безпека функціонування формується сукупною дією технічних і людських факторів [3], [10].

Стан Л-М-С системи у довільний момент часу t доцільно описувати вектором фазових змінних

$$X(t) = x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \quad (1)$$

де компоненти вектора $x_i(t)$ характеризують технічний стан обладнання, функціональну працездатність оператора, а також ефективність спрацювання підсистеми захисту. Такий векторний опис дозволяє формалізувати багатокomпонентну структуру системи та врахувати взаємний вплив її елементів у процесах деградації й відновлення [1], [3].

Доцільно інтерпретувати вектор стану системи як композицію трьох підпросторів

$$X(t) = X_T(t), X_H(t), X_P(t), \quad (2)$$

де $X_T(t)$ — стан технічної підсистеми; $X_H(t)$ — стан оператора; $X_P(t)$ — стан підсистеми захисту.

Таке подання дозволяє формалізувати структуру людино-машинно-середовищної системи як багатоконпонентного стохастичного об'єкта з взаємопов'язаними каналами деградації та відновлення.

У післяаварійних режимах функціонування поведінка Л-М-С системи зручно подається у вигляді марківського процесу з дискретною множиною станів

$$S = S_0, S_1, \dots, S_m, \quad (3)$$

де S_0 — нормальний режим роботи системи; S_i — передаварійні або перехідні стани деградації; S_m — аварійний стан або стан відновлення системи.

Перехід системи між зазначеними станами відбувається випадковим чином під дією внутрішніх відмов технічних компонентів, операторських рішень і зовнішніх збурень середовища, що обґрунтовує використання апарату марківських процесів безперервного часу для опису еволюції системи [1], [2].

Динаміка визначається вектором імовірностей перебування у відповідних станах

$$P(t) = p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t), \quad (4)$$

де $p_i(t)$ — імовірність перебування системи у стані S_i у момент часу t .

Еволюція цього вектора описується рівняннями Колмогорова для марківського процесу безперервного часу

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q, \quad (5)$$

де $Q = (q_{ij})$ — матриця інтенсивностей переходів між станами системи.

Це рівняння описує баланс потоків імовірностей між станами системи: швидкість зміни імовірності перебування у стані визначається сумарною інтенсивністю входу та виходу з цього стану.

Елементи матриці Q визначаються співвідношеннями

$$q_{ij} = \lambda_{ij}, \quad i \neq j, \quad (6)$$

де λ_{ij} — інтенсивність переходу системи зі стану S_i у стан S_j , що характеризує швидкість виникнення відповідної події (відмови, спрацювання захисту або завершення відновлення). Діагональні елементи матриці визначаються умовою нормування

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}. \quad (7)$$

Таким чином забезпечується виконання умови збереження повної ймовірності

$$\sum_{i=0}^m p_i(t) = 1. \quad (8)$$

Для стаціонарного режиму функціонування системи вектор граничних імовірностей $\pi/p/\pi$ визначається з розв'язку системи рівнянь

$$\pi Q = 0, \quad \sum_{i=0}^m \pi_i = 1. \quad (9)$$

Отриманий стаціонарний розподіл дозволяє визначити основні показники надійності та відновлюваності системи, зокрема імовірність перебування у працездатному стані, середній час відновлення після аварії та коефіцієнт готовності системи [3], [4]

На основі стаціонарного розподілу визначається коефіцієнт готовності системи

$$K_g = \pi_0, \quad (10)$$

який характеризує імовірність перебування системи у працездатному стані протягом довільного моменту часу.

Характерною особливістю людино-машинно-середовищних систем з підсистемою захисту є наявність різних часових масштабів перебігу процесів деградації, відновлення та автоматичного реагування. Зокрема, спрацювання підсистеми захисту відбувається значно швидше порівняно з еволюцією

технічного стану обладнання та процесами післяаварійного відновлення. Це обґрунтовує доцільність застосування сингулярно збурених марківських моделей для опису динаміки системи [2], [5].

Для формалізації різношвидкісних процесів введемо малий параметр

$$\varepsilon \ll 1, \quad (11)$$

який характеризує відношення характерного часу швидких переходів підсистеми захисту до часу повільних процесів деградації та відновлення системи.

Фізично параметр

$$\varepsilon = \frac{\tau_f}{\tau_s} \quad (12)$$

визначає відношення характерного часу спрацювання підсистеми захисту τ_f до характерного часу деградації або відновлення технічної підсистеми τ_s . Малий параметр ε відображає наявність часової ієрархії процесів у системі.

З урахуванням цього матрицю інтенсивностей переходів марківського процесу доцільно подати у вигляді розкладу

$$Q = \frac{1}{\varepsilon} Q_f + Q_s, \quad (13)$$

де Q_f — матриця швидких переходів, що описує спрацювання підсистеми захисту та швидкі перемикання режимів функціонування; Q_s — матриця повільних переходів, яка характеризує процеси деградації технічних компонентів, відновлення працездатності системи та операторські керувальні дії.

Перший доданок визначає швидку динаміку системи, зумовлену спрацюванням підсистеми захисту, тоді як другий — повільну еволюцію, пов'язану з деградацією та відновленням технічної підсистеми.

У цьому випадку асимптотичний розклад розв'язку рівнянь Колмогорова дозволяє отримати оцінку похибки редукованої моделі

$$\|P(t) - \bar{P}(t)\| = O(\varepsilon), \quad (14)$$

що підтверджує коректність застосування агрегованої марківської моделі за малих значень параметра ε .

Тоді рівняння Колмогорова для вектора ймовірностей станів системи набуває вигляду

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left(\frac{1}{\varepsilon} Q_f + Q_s \right) \quad (15)$$

і у такій формі дозволяє виділити швидку та повільну складові динаміки системи та застосувати асимптотичні методи аналізу багатомасштабних стохастичних процесів. У граничному випадку $\varepsilon \rightarrow 0$ швидка підсистема переходить у квазістаціонарний режим, тоді як подальша еволюція системи визначається повільною складовою процесу [2].

Фізично це означає, що підсистема захисту практично миттєво переводить систему у безпечний підпростір станів, після чого її подальша поведінка описується агрегованою марківською моделлю меншої розмірності. Такий підхід дозволяє істотно зменшити розмірність простору станів і підвищити ефективність аналізу процесів відновлення складних ЛМ-С систем у післяаварійних режимах функціонування [3], [4].

Для сингулярно збуреної марківської моделі людино-машинно-середовищної системи характерною є наявність швидкої та повільної складових динаміки, що відповідають роботі підсистеми захисту та процесам деградації й відновлення відповідно. У випадку малого параметра $\varepsilon \ll 1$ швидка підсистема переходить до квазістаціонарного режиму функціонування значно швидше, ніж змінюється стан повільної підсистеми. Це дозволяє застосувати асимптотичну декомпозицію марківського процесу за часовими масштабами [2], [5].

Квазістаціонарний розподіл швидкої підсистеми визначається розв'язком рівняння

$$\pi Q_f = 0, \sum_i \pi_i = 1, \quad (16)$$

де π — стаціонарний розподіл швидких переходів, що описує внутрішню рівновагу підсистеми захисту за фіксованого стані повільної підсистеми.

Це рівняння означає, що швидка підсистема досягає внутрішньої рівноваги значно швидше, ніж змінюється стан повільної підсистеми.

Після завершення швидкого перехідного процесу подальша еволюція системи описується агрегованою марківською моделлю, генератор якої має вигляд

$$\bar{Q} = \Pi Q_s, \quad (17)$$

де Π — матриця стаціонарних розподілів швидкої підсистеми, сформована на основі вектора π , а Q_s — матриця інтенсивностей повільних переходів.

Отже, вплив швидких процесів враховується опосередковано через ефективні коефіцієнти переходів у редукованій моделі.

Матриця Π описує стаціонарні розподіли швидких переходів підсистеми захисту та визначає ефективні інтенсивності переходів між агрегованими станами системи з урахуванням впливу швидкодіючих механізмів стабілізації режимів функціонування. Таким чином, початкова багатомасштабна марківська модель редукується до еквівалентної моделі меншої розмірності, що істотно спрощує аналіз процесів післяаварійного відновлення системи та дозволяє визначати стаціонарні характеристики її функціонування з урахуванням взаємодії технічної підсистеми, оператора і підсистеми захисту [2], [3].

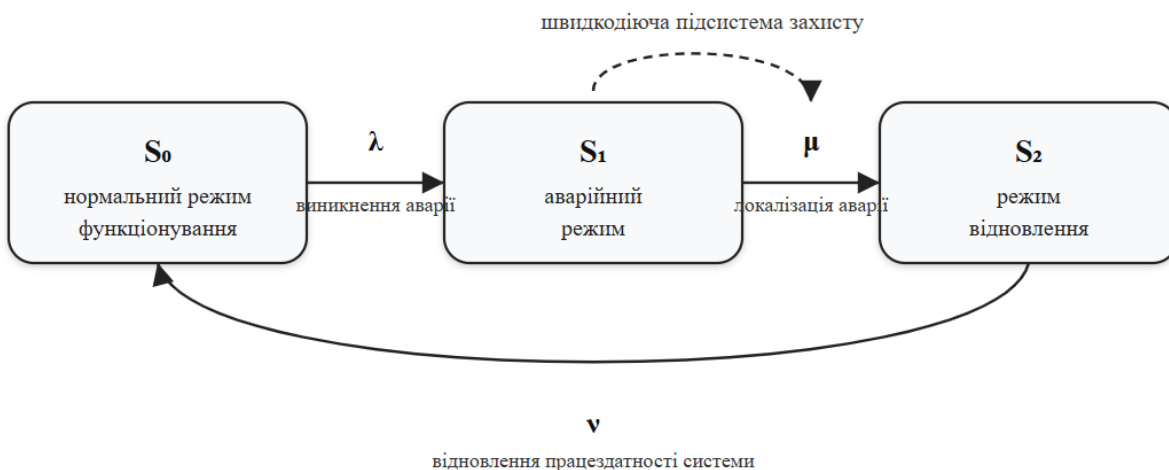
Застосування асимптотичного підходу забезпечує можливість формування ефективного генератора агрегованого процесу та створює математичну основу для оцінювання показників готовності, надійності та середнього часу відновлення людино-машинно-середовищних систем у післяаварійних режимах функціонування [4].

Для кількісного опису післяаварійної динаміки людино-машинно-середовищної системи розглянемо спрощену марківську модель процесу відновлення з трьома дискретними станами функціонування

$$S = S_0, S_1, S_2, \quad (18)$$

де S_0 — нормальний режим роботи системи; S_1 — аварійний режим; S_2 — режим відновлення працездатності системи.

Граф (рис.) відображає основні переходи між станами системи: виникнення аварії (λ), її локалізацію підсистемою захисту (μ) та відновлення працездатності (ν). Така структура відповідає циклічній моделі функціонування складних технічних систем.



Граф переходів станів людино-машинно-середовищної системи

Еволюція системи між цими станами описується марківським процесом безперервного часу з матрицею інтенсивностей переходів

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \nu & 0 & -\nu \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де λ — інтенсивність виникнення аварійної події; μ — інтенсивність локалізації аварії підсистемою захисту; ν — інтенсивність відновлення працездатності системи.

Така структура генератора переходів відповідає циклічній схемі функціонування «нормальний режим — аварія — відновлення — нормальний режим» і дозволяє формалізувати процеси деградації та відновлення технічної системи в межах єдиного стохастичного опису [3], [4].

Динаміка ймовірностей перебування системи у відповідних станах визначається рівняннями Колмогорова (4), (5)

Стационарний розподіл ймовірностей $\pi = \pi_0, \pi_1, \pi_2$ визначається системою рівнянь

$$\pi Q = 0; \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1. \quad (20)$$

Розв'язок цієї системи дозволяє отримати аналітичні оцінки коефіцієнта готовності системи, ймовірності перебування у відмовному стані та середнього часу відновлення після аварії [3].

Побудована сингулярно збурена марківська модель процесів переходу між станами людино-машинно-середовищної системи дозволяє визначити основні кількісні характеристики її післяаварійного функціонування, зокрема ймовірність перебування системи у критичному стані, середній час відновлення працездатності, інтенсивність переходу до безпечного режиму роботи та ефективність функціонування підсистеми захисту [3], [4].

Нехай стационарний розподіл ймовірностей перебування системи у станах

$$\pi = \pi_0, \pi_1, \pi_2 \quad (21)$$

визначається як розв'язок системи рівнянь

$$\pi Q = 0; \quad \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1, \quad (22)$$

де Q — матриця інтенсивностей переходів марківського процесу. Тоді величина π_1 характеризує ймовірність перебування системи у критичному (аварійному) стані, а π_0 — ймовірність її працездатного функціонування, що інтерпретується як коефіцієнт готовності системи [3].

Середній час перебування системи у стані відновлення визначається як математичне сподівання тривалості перебування у відповідному стані марківського процесу

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad (23)$$

де ν — інтенсивність відновлення працездатності системи. Ця величина характеризує швидкість повернення системи до нормального режиму роботи після аварійного переходу.

Середній цикл функціонування системи визначається сумарним часом перебування у нормальному, аварійному та відновлювальному станах

$$T_{cycle} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}. \quad (24)$$

Цей показник характеризує повний часовий інтервал одного циклу «нормальний режим — аварія — відновлення».

Інтенсивність переходу до безпечного режиму функціонування визначається параметром μ , який характеризує швидкість підсистеми захисту та ефективність локалізації аварійної ситуації. При цьому ефективність функціонування підсистеми захисту може оцінюватися через умовну ймовірність повернення системи до працездатного стану після аварійного переходу

$$\eta = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad (25)$$

що відображає співвідношення швидкості локалізації аварії та швидкості відновлення системи.

Інтегральний показник ефективності функціонування підсистеми захисту може бути також

визначений співвідношенням

$$E = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad (26)$$

яке характеризує імовірність локалізації аварійної ситуації до переходу системи у критичний стан.

Середній час перебування системи в аварійному стані визначається співвідношенням

$$T_{fail} = \frac{1}{\mu}, \quad (27)$$

що характеризує швидкість локалізації аварійного режиму підсистемою захисту.

У разі використання сингулярно збуреної структури матриці інтенсивностей переходів ефективні характеристики відновлення визначаються вже агрегованою матрицею переходів, що дозволяє врахувати вплив швидкодіючої підсистеми захисту на стаціонарні показники готовності та надійності системи. Такий підхід забезпечує можливість отримання узагальнених оцінок часу відновлення та імовірності перебування системи у безпечному режимі з урахуванням багатомасштабної структури процесів її функціонування [2], [4].

Для підтвердження практичної реалізації запропонованої моделі розглянемо спрощену людино-машинно-середовищну систему з трьома станами: S_0 — нормальний режим, S_1 — аварійний режим, S_2 — режим відновлення. Нехай інтенсивність виникнення аварії становить $\lambda = 0,02 \text{ год}^{-1}$, інтенсивність локалізації аварії підсистемою захисту — $\mu = 0,50 \text{ год}^{-1}$, а інтенсивність відновлення системи — $\nu = 0,25 \text{ год}^{-1}$. Тоді матриця інтенсивностей переходів має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,02 & 0 \\ 0 & -0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0 & -0,25 \end{pmatrix}.$$

Стаціонарний розподіл імовірностей визначається з системи

$$\pi Q = 0; \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Для заданих параметрів отримуємо $\pi_0 = 0,893$; $\pi_1 = 0,036$; $\pi_2 = 0,071$.

Отже, коефіцієнт готовності системи становить

$$K_g = \pi_0 = 0,893.$$

Імовірність перебування системи в аварійному стані дорівнює

$$P_{crit} = \pi_1 = 0,036.$$

Середній час перебування системи у стані відновлення визначається як

$$T_{rec} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ год.}$$

Середній час локалізації аварійного режиму підсистемою захисту становить

$$T_{loc} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,50} = 2 \text{ год.}$$

Середній цикл функціонування системи можна оцінити як

$$T_{cycle} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 50 + 2 + 4 = 56 \text{ год.}$$

Для оцінювання впливу швидкодіючої підсистеми захисту порівняємо базовий варіант з варіантом підвищеної швидкодії, коли $\mu = 1,00 \text{ год}^{-1}$, а інші параметри залишаються незмінними. У цьому випадку:

$$T_{loc} = \frac{1}{1,00} = 1 \text{ год.}$$

Стационарні імовірності набувають значень $\pi_0 = 0,909$; $\pi_1 = 0,018$; $\pi_2 = 0,073$.

Порівняння результатів показує, що збільшення інтенсивності локалізації аварії з 0,50 до $1,00 \text{ год}^{-1}$ зменшує імовірність перебування системи в аварійному стані з 0,036 до 0,018, тобто майже вдвічі. Водночас коефіцієнт готовності системи зростає з 0,893 до 0,909.

Отримані результати підтверджують практичну придатність запропонованої марківської моделі для кількісного оцінювання ефективності підсистеми захисту. Зокрема, модель дозволяє дослідити вплив інтенсивностей переходів λ , μ , ν на імовірність критичного стану, коефіцієнт готовності та середній час відновлення системи. Це створює основу для вибору параметрів підсистеми захисту, оптимізації часу реагування та підвищення загальної надійності людино-машинно-середовищної системи.

Запропонована сингулярно збурена марківська модель процесів відновлення людино-машинно-середовищних систем може бути застосована для аналізу широкого класу технічних систем критичної інфраструктури, що характеризуються наявністю швидкодіючих підсистем захисту та багато-масштабної динаміки функціонування.

Насамперед до таких систем належать енергетичні системи та електроенергетичні мережі, де підсистеми релейного захисту та автоматики (РЗА) забезпечують миттєве реагування на аварійні відхилення параметрів режиму. У цьому випадку швидкі переходи Q_f описують спрацювання захисту (відключення ліній, генераторів), тоді як повільні переходи Q_s характеризують процеси відновлення енергосистеми, повторного включення обладнання та дії диспетчерського персоналу.

Другим важливим класом є транспортні системи, зокрема залізничні комплекси та системи керування рухом, де автоматичні системи сигналізації та блокування виконують функції швидкого реагування на небезпечні ситуації. У таких системах модель дозволяє оцінити імовірність виникнення аварійних ситуацій, ефективність спрацювання захисту та середній час відновлення нормального режиму руху.

Третій напрям застосування пов'язаний з авіаційними та космічними системами, де системи автоматичного контролю та захисту забезпечують стабілізацію параметрів польоту та запобігання критичним відмовам. У цьому випадку сингулярно збурена структура моделі дозволяє врахувати значну різницю між швидкістю спрацювання бортових систем захисту та процесами прийняття рішень оператором або наземним персоналом.

Окрему групу становлять інформаційно-керувальні та кіберфізичні системи, у яких функціонують автоматичні механізми захисту від збоїв і кіберзагроз. У таких системах швидкі переходи відповідають реакції систем безпеки (firewall, intrusion detection), а повільні — відновленню працездатності сервісів і втручанню оператора. Запропонована модель дозволяє оцінити надійність системи в умовах динамічних атак і відновлення після інцидентів.

Також модель може бути ефективно використана для аналізу промислових автоматизованих систем керування (SCADA, АСУ ТП), де підсистеми аварійного захисту забезпечують швидке відключення обладнання у разі виходу параметрів за допустимі межі. У цьому випадку застосування сингулярно збурених марківських моделей дозволяє оцінити ефективність алгоритмів захисту, мінімізувати час простою обладнання та підвищити загальну надійність виробничих процесів.

Висновки

Розроблено сингулярно збурену марківську модель процесів відновлення людино-машинно-середовищних систем з підсистемою захисту, яка дозволяє врахувати різні часові масштаби функціонування технічних компонентів, оператора та підсистеми захисту. Запропонований підхід забезпечує можливість агрегування станів системи та побудови редукованої математичної моделі меншої розмірності.

Показано, що використання сингулярно збурених марківських моделей дозволяє підвищити ефективність аналізу післяаварійних режимів функціонування складних технічних систем та забезпечує можливість оцінювання основних характеристик процесів відновлення системи.

Запропонований підхід дозволяє зменшити розмірність простору станів марківської моделі без втрати точності опису процесів післяаварійного відновлення людино-машинно-середовищних систем.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у розробленні сингулярно збуреної марківської моделі процесів відновлення людино-машинно-середовищних систем з підсистемою захисту, яка враховує різні часові масштаби функціонування підсистем та забезпечує можливість редукції складної математичної моделі до агрегованої марківської системи меншої розмірності.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробленням чисельних алгоритмів аналізу сингулярно збурених марківських моделей та їх застосуванням для дослідження процесів відновлення складних технічних систем критичної інфраструктури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] S. M. Ross, *Stochastic Processes*, 2nd ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 1996, 544 p. <https://ru.scribd.com/document/670138144/Stochastic-Processes-2nd-Edition-Sheldon-M-Ross>.
- [2] G. G. Yin, and Q. Zhang, *Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Two-Time-Scale Approach*, 2nd ed. New York, USA: Springer, 2013, 447 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4346-9>.
- [3] K. S. Trivedi, and A. Bobbio, *Reliability and Availability Engineering: Modeling, Analysis, and Applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017, 726 p. <https://doi.org/10.1017/9781316163047>.
- [4] N. Limnios, and G. Oprisan, *Semi-Markov Processes and Reliability*. Boston, USA: Birkhäuser, 2001, 238 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0161-8>.
- [5] А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, та М. О. Перестюк, *Диференціальні рівняння в задачах*. Київ, Україна: Либідь, 2003, 505 с. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf.
- [6] V. S. Korolyuk, "Markov renewal processes in reliability analysis," in *Semi-Markov Models*, J. Janssen, Ed. Boston, USA: Springer, 1986, pp. 217-230. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0574-1_12.
- [7] V. S. Koroliuk, and N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. Singapore: World Scientific, 2005, 348 p. <https://doi.org/10.1142/5979>.
- [8] S. A. Semenyuk, and Ya. M. Chabanyuk, "Stochastic evolutionary system with Markov-modulated Poisson perturbations in the averaging schema," *Matematychni Studii*, vol. 62, no. 1, pp. 102-108, 2024. <https://doi.org/10.30970/ms.62.1.102-108>.
- [9] В. М. Грібов, Г. С. Марінченко, В. П. Стрельников, і О. В. Кожохіна, *Надійність систем авіоники*. Київ, Україна: Альянт, 2021, 264 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://er.nau.edu.ua/handle/NAU/9228>.
- [10] R. Patriarca, G. Di Gravio, F. Costantino, et al., "Human reliability analysis: Exploring the intellectual structure of a research field," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 203, Art. no. 107102, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2020.107102>.
- [11] *Human Reliability Analysis for Nuclear Installations*. Vienna, Austria: International Atomic Energy Agency, 2025, 290 p. <https://doi.org/10.61092/iaea.aq89-8yvf>.
- [12] E. Zio, "The future of risk assessment," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 177, pp. 176-190, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2018.04.020>.
- [13] D.-Y. Yang, and C.-H. Wu, "Evaluation of the availability and reliability of a standby repairable system incorporating imperfect switchovers and working breakdowns," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 205, Art. no. 107366, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2020.107366>.
- [14] X. Pan, H. Chen, A. Shen, D. Zhao, and X. Su, "A reliability assessment method for complex systems based on non-homogeneous Markov processes," *Sensors*, vol. 24, no. 11, Art. no. 3446, 2024. <https://doi.org/10.3390/s24113446>.
- [15] N. Khakzad, "Application of dynamic Bayesian network to risk analysis of domino effects in chemical infrastructures," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 138, pp. 263-272, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2015.02.007>.
- [16] M. Neil, and D. Marquez, "Availability modelling of repairable systems using Bayesian networks," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 25, no. 4, pp. 698-704, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2010.06.003>.
- [17] G. Manno, F. Chiacchio, L. Compagno, D. D'Urso, and N. Trapani, "Conception of repairable dynamic fault trees and resolution by the use of RAATSS, a Matlab toolbox based on the ATS formalism," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 121, pp. 250-262, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2013.09.002>.
- [18] A. Lye, J. Chang, K. Chung, et al., "An overview of probabilistic safety assessment for nuclear facilities," *Journal of Nuclear Engineering*, vol. 5, no. 4, Art. no. 29, 2024. <https://doi.org/10.3390/jne5040029>.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління ВНТУ

Дата надходження 23.04.2026

Дата прийняття після доопрацювання 4.08.2026

Дата прийняття до друку після рецензування 10.08.2026

Дата публікації 2.10.2026

Яловега Ірина Георгіївна — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки; доцент кафедри економіко-математичного моделювання Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця, e-mail: iryna.ialoveha@nure.ua. <https://orcid.org/0000-0002-2486-1812>;

Федосєнко Андрій Олегович — аспірант кафедри прикладної математики, e-mail: andrii.fedosienko@nure.ua. <https://orcid.org/0009-0008-2664-2868>.

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

Singularly Perturbed Markov Models of Recovery Processes of Human–Machine–Environmental Systems with a Protection Subsystem

¹Kharkiv National University of Radio Electronics

The relevance of the study is due to the need to increase the efficiency of mathematical modeling of the recovery processes of complex human-machine-environmental systems operating in post-accident modes and is characterized by the presence of fast-acting protection subsystems, different time scales of the course of degradation and recovery processes. Traditional Markov models of continuous time do not always enable to adequately take into account the multi-scale structure of the dynamics of such systems, which necessitates the use of singularly perturbed stochastic models.

The aim of the article is to develop a singularly perturbed Markov model of the recovery processes of a human-machine-environmental system with a protection subsystem and to study its asymptotic properties taking into account different time scales of the subsystems' functioning.

The methodological basis of the study is the apparatus of Markov processes of continuous time, methods of asymptotic analysis of singularly perturbed systems, Kolmogorov equations and approaches to the aggregation of states of multi-scale stochastic models. The paper proposes the representation of the transition intensity matrix as the sum of fast and slow components with the introduction of a small parameter characterizing the ratio of time scales of the functioning of the protection subsystems and the technical system.

A generalized singularly perturbed Markov model of the post-accident recovery processes of the human-machine-environmental system has been developed, which allows taking into account the interaction of the technical subsystem, the operator and the protection subsystem in a single stochastic state space. An aggregated transition matrix of the reduced model has been obtained and the possibility of determining the stationary characteristics of the system functioning, in particular the readiness coefficient, the average recovery time and the probability of the system being in a critical state, has been shown.

The scientific novelty of the obtained results lies in the construction of a singularly perturbed Markov model of the recovery processes of human-machine-environmental systems with a protection subsystem, which allows taking into account the multi-scale structure of the functioning processes and performing a reduction of the state space without losing the accuracy of the description of the post-accident dynamics of the system.

The practical significance of the results obtained lies in the possibility of using the proposed model to assess the reliability and readiness indicators of complex technical systems of critical infrastructure, as well as to analyze the efficiency of protection subsystems functioning in emergency modes.

Keywords: singularly perturbed systems, continuous-time Markov processes, human-machine-environmental systems, technical systems recovery processes, protection subsystem, multiscale stochastic models, mathematical modeling of complex systems, differential equations, neural sets, fuzzy sets.

Yaloveha Iryna H. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics of Kharkiv National University of Radio Electronics; Associate Professor of the Chair of Economic and Mathematical Modeling of Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, e-mail: iryna.ialoveha@nure.ua . <https://orcid.org/0000-0002-2486-1812>;

Fedosieienko Andrii O. — Post-Graduate Student of the Chair of Applied Math, e-mail: andrii.fedosieienko@nure.ua. <https://orcid.org/0009-0008-2664-2868>