

ДІАГНОСТИКА СТАНУ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ РОЗДІЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ

¹Вінницький національний технічний університет

Для забезпечення високого рівня продуктивності та надійності функціонування сучасних високоінтегрованих технічних систем критично важливим є своєчасне виявлення та ідентифікація несправностей, відмов і різких збурень. Їх оперативне розпізнавання дає можливість своєчасно застосувати адекватні коригувальні дії, спрямовані на відновлення працездатності системи та запобігання розвитку аварійних ситуацій. У роботі розглянуто задачу синтезу спеціалізованого фільтра, призначеного для виявлення та локалізації відмов, несправностей або збурень в класі лінійних стаціонарних дискретних систем. В основу алгоритму покладена ідея аналітичної надлишковості у вигляді математичної моделі об'єкта спостереження. Діагностичний алгоритм проектувався так, щоб попередньо сформовані залишкові різниці у вигляді сигнатур дозволяли відокремити ефект несправностей цільового типу від впливу несправностей або збурень іншого класу. Результатом стало формування структури пристрою класу «екстраполятор–коректор», що містить два паралельно працюючих фільтра реалізовані у формі, алгоритмічно споріднених з фільтром Калмана. Характерним є те, що одна з підсистем забезпечує оцінювання вектора стану без врахування відмов, а інша, вироджена за структурою, призначена для формування оцінки несправностей. Елементи утвореного вектора різниць однозначно пов'язані з заданим типом несправності. Застосування наведеного алгоритму дозволяє скоротити обчислювальні витрати, проте супроводжується введенням додаткових обмежень і зменшенням точності результатів оцінювання, що пов'язано з обчислювальними аспектами відносно системних псевдообернених матриць. Оскільки таке рішення є наближеним і неоднозначним отримана структура має ознаки квазіоптимальності. На рівні загальних стверджень, у скороченій формі обговорено питання збіжності та стійкості отриманих оцінок. Наведено результати перевірки працездатності методу на ілюстративному числовому прикладі. Аналіз отриманих результатів подано на фоні можливостей класичного фільтра Калмана, що дозволило наочно показати ефективність розробленого підходу та його переваги. Дані обчислювального експерименту підтвердили загальну працездатність методу. Синтезований фільтр здатний формувати оцінки станів задовільної якості та виконувати коректну роботу з діагностики непередбачених несправностей, відмов та різких збурень. На основі зроблених висновків можна констатувати, що представлена робота вносить елемент наукової новизни у сфері виявлення та класифікації множинних несправностей у лінійних дискретних динамічних системах. Сформовано напрямки подальших досліджень.

Ключові слова: дискретна лінійна динамічна система; метод роздільного оцінювання; аналітична надлишковість.

Вступ

У реальних умовах функціонування фізичних систем часто трапляються раптові зміни їхньої динаміки, які негативно впливають на якісні характеристики. З позиції першого наближення зазначені зміни інтерпретуються як прояви несправностей, відмов або збурень. Несправності проявляються як відхилення параметрів системи від номінальних значень за межі регламентованих норм і зазвичай виникають у наслідок некоректної роботи приладів та/або систем керування, у той час як збурення визначаються як фактори зовнішнього або внутрішнього походження, що теж призводять до відхилення системи від нормального функціонування. Відмови є різкими динамічними змінами у вигляді аномального розвитку процесу, що проявляється у вигляді раптових параметричних або структурних змін його динаміки. Під дією зазначених факторів система нерідко виявляється неспроможною реалізувати поставлені перед нею завдання. Для забезпечення стабільної працездатності системи необхідно своєчасно виявляти та ідентифікувати небажані зміни шляхом застосування



відповідних методів і технічних засобів. Їх оперативне розпізнавання надає можливість своєчасно застосувати адекватні коригувальні дії, спрямовані на відновлення працездатності системи та запобігання розвитку аварійних ситуацій.

Одним з перспективних напрямів реалізації вбудованих систем оперативної діагностики є використання модельно-орієнтованих методів, що забезпечують виявлення та локалізацію несправностей і вже тривалий час залишаються у центрі наукових досліджень. За цей час сформовано та реалізовано різноманітні підходи до розв'язання відповідної проблеми. До цього напрямку можна віднести дослідження, пов'язані з методами паритетних відносин, узагальненого відношення правдоподібності, фільтрів виявлення, спостерігачів з невизначеним входом та ін. Значна частина специфічних аспектів цих методів відображена у відомих оглядових та прикладних дослідженнях [1]—[6]. Сьогодні в центрі наукових досліджень перебувають проблеми інтеграції кількісних і якісних методів діагностики динамічних систем, зокрема методів виявлення, локалізації та ідентифікації несправностей [7], [8]. Прикладні питання, пов'язані з цим напрямком, частково висвітлені в роботі [9]—[11]. У публікаціях [12] розглядається становлення відносно нового напрямку досліджень — відмовостійкого керування, яке поєднує методи оптимального керування та функціональної діагностики. Упродовж останніх років з'явилися книги та монографії, щодо дослідження окремих аспектів діагностики несправностей у лінійних динамічних системах зі змінними параметрами [12]. Отже, модельно-орієнтовані методи діагностики несправностей та їх локалізації продовжують бути предметом інтенсивних досліджень, зберігаючи актуальність як для фундаментальної науки, так і для практичних застосувань.

Процедура модельно-орієнтованого виявлення та локалізації несправностей включає два основні кроки: формування різницевого сигналу та прийняття рішень. Вихідні сигнали сенсорної підсистеми обробляються таким чином, щоб підкреслити характерні риси несправностей, якщо вони мають місце, і це згодом дає можливість їх розпізнавати. Результати такої специфічної обробки називаються залишковими різницями, а характерні ознаки несправностей — сигнатурою [14]. У тому випадку, коли система справна, залишкові різниці є незміщеними, це вказує на відсутність розбіжностей між спостережуваною та очікуваною поведінкою системи. Сигнатура несправностей проявляється у специфічних зміщеннях залишкових різниць, форма яких варіює залежно від характеру несправності. Тому формування залишкових різниць можливе лише за умов наявності інформації про поведінку системи у номінальному режимі за відсутності несправностей. Серед методів обробки результатів вимірювань, призначених для виявлення та локалізації несправностей, підвищену увагу привертає геометричний підхід [15], [16], заснований на формуванні спрямованих залишкових різниць. Згодом результати цих робіт використовувалися у роботі [17], яка висвітлює синтез фільтрів виявлення.

Спостерігач повного порядку, здатний асимптотично виявляти та локалізувати множинні несправності у лінійній стаціонарній системі безперервного часу розглянуто в роботі [18]. Вибір матриці передачі спостерігача здійснювався так, щоб кожен компонент різницевого сигналу був чітко пов'язаний із певною несправністю та водночас не залежав від інших типів несправностей з апіорно визначеної множини. Практична апробація методу підтвердила його результативність лише за умови, що стовпці матриці виявлення формуються на основі власних значень матриці передачі спостерігача.

Це дослідження спрямоване на подальший розвиток методу для лінійних дискретних систем, що зазнають впливу несправностей чи збурень, структура яких апіорно не визначена.

Незважаючи на те, що несправності та збурення є різними за фізичною природою явищами, їхній вплив на досліджувану систему має багато спільних рис, як вже зазначалося, вони призводять до погіршення якісних показників функціонування. Зважаючи на це, у цьому дослідженні головний акцент зроблено на виявленні та локалізації несправностей, що трактуються як адитивні збурення невідомої структури. Отримана в результаті синтезу структура пристрою типу «екстраполятор–корректор», за своєю організацією подібна до фільтра Калмана, проте адаптована до специфіки поставленої задачі. Це забезпечує можливість комплексного дослідження питань збіжності та стійкості отриманих оцінок.

Формулювання задачі дослідження

Вважатимемо, що лінійна дискретна стаціонарна динамічна система, яка піддається впливу несправностей і (або) раптових збурень, може бути формалізована у вигляді системи різницевих рівнянь [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{f}_k + \mathbf{w}_k; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{s}_k + \mathbf{w}_k. \end{aligned} \quad (1)$$

У цьому випадку: $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор, що описує внутрішній стан, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор вимірювань, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^q$ — точно відомий вектор керування, $\mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^p$ — вектор несправностей з невизначеною структурою, а $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ — матриця апріорно визначених напрямів, що формують сигнатуру можливих несправностей. Шумові складові $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ представлені некорельованими випадковими послідовностями з нульовим середнім та відповідними коваріаціями $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$. Припускається, що всі системні матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times q}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ є сталими, відомими і є матрицями повного рангу. За заданих початкових умов $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_0; \mathbf{u}_0 = 0; \mathbf{f}_0 = 0$, значення яких некорельовані з шумовими послідовностями $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ та є гаусівськими випадковими послідовностями, вихід системи (1) у момент часу k визначається відомим співвідношенням

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{s}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}\mathbf{u}_{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{F} \mathbf{f}_{k-i}. \quad (2)$$

Згідно з базовими положеннями роботи [19], введемо критерій, який використовується для виявлення несправностей

$$\beta_i = \min \left\{ m : \mathbf{C}\mathbf{A}^{m-1} \mathbf{f}_i \neq 0; \quad m = 1, 2, \dots \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

де $\mathbf{f}_i$ є i -м стовпцем матриці $\mathbf{F}$. Запроваджений показник характеризує кількість спостережень, у яких несправність проявляється у явній формі. Якщо в системі (1) кількість показників виявлення є обмеженою, то можна визначити матрицю виявлення несправностей у вигляді

$$\mathbf{J}_\beta = \left[\mathbf{C}\mathbf{A}^{\beta_1-1} \mathbf{f}_1, \mathbf{C}\mathbf{A}^{\beta_2-1} \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{\beta_p-1} \mathbf{f}_p \right], \quad (4)$$

де $\mathbf{J}_\beta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\beta_i, i = 1, 2, \dots, p$ — показник виявлення несправності, пов'язаний з векторним напрямком. Запропонований метод опису розподілу несправностей за апріорі введеними напрямками дозволяє групувати та впорядковувати стовпці матриці $\mathbf{F}$ та вектор $\mathbf{f}_k$ відповідно до показника виявлення несправності за кожним напрямком $\mathbf{f}_i$. Зазвичай сукупність несправностей, що описується виразом, сортується від найбільшого значення показника до найменшого його значення. При цьому матриця виявлення несправностей та вектор несправностей зазнають змін, які можна описати сукупністю виразів за аналогією до [19]

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left[\mathbf{C}\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{F}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{z-1} \mathbf{F}_z \right]; \\ \boldsymbol{\eta} &= \left[\mathbf{f}_{k-1}^1 \quad \mathbf{f}_{k-2}^2 \quad \dots \quad \mathbf{f}_{k-z}^z \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\mathbf{F}_l = [\mathbf{f}_m \quad \dots \quad \mathbf{f}_l]: \mathbf{f}_m \neq \mathbf{f}_{l \wedge \beta_m = \beta_l}, \mathbf{f}_{k-l}^l = [\mathbf{f}_{k-l}^m \quad \dots \quad \mathbf{f}_{k-l}^l], \forall l = 1, 2, \dots, z = \max(\beta_i); \quad \forall m = 1, 2, \dots, z = \max(\beta_i)$.

Інтегруючи співвідношення (5) у рівняння (2) та здійснивши розмежування між результатами попередніх спостережень і спостереженнями поточного моменту часу, маємо

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{s}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}\mathbf{u}_{k-i} + \sum_{i=2}^{k-1} \mathbf{J} \boldsymbol{\eta}_{k-i} + \mathbf{J} \boldsymbol{\eta}_{k-i}. \quad (6)$$

Легко помітити, що перші дві складові виразу (6) описують еволюцію системи відповідно до апріорно заданої моделі, тобто без урахування впливу несправностей. Третя та четверта складові відображають виключно вплив минулих і поточних несправностей. Для подальшого спрощення припустимо, що до моменту часу k несправності не виникали. У цьому випадку третю складову (6) доцільно вважати рівною нулю. Тоді для номінального режиму функціонування системи до моменту часу k рівняння виходу (1) може бути подане у вигляді еквівалентного виразу

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{s}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}\mathbf{u}_{k-i} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-i}.$$

яке неважко привести до вигляду

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{s}_k + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-1}. \quad (7)$$

Отже, рівняння виходу (7) набуває еквівалентної форми, що дозволяє чітко розмежувати вплив несправностей та вплив керувального входу й внутрішньої динаміки системи.

Отриманий результат слугує відправною точкою для проєктування модифікованого фільтра, здатного виявляти та локалізувати множинні несправності, що виникають як одночасно, так і послідовно в часі.

Формування алгоритму фільтрації для виявлення та локалізації несправностей

Відомо, що фільтр Калмана у стандартній постановці, призначений для оцінювання станів дискретної лінійної динамічної системи, може бути еквівалентно поданий у формі спостерігача [6], [11].

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}\mathbf{r}_k; \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ — екстрапольована оцінка вектора стану системи, $\hat{\mathbf{y}}_k$ — оцінка виходу системи, $\mathbf{K}$ — матриця передачі спостерігача, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k$ — різницевий сигнал. Для того, щоб синтезувати фільтр, чутливий до несправностей, варто врахувати раніше отримане співвідношення (7) у рівнянні для різницевого сигналу. Звідси отримуємо

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-1}. \quad (9)$$

Неважко помітити, що у виразі (9) присутні дві складові. Перша з них $\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k$ є похибкою оцінювання вектора стану системи, яка ігнорує розглянуті несправності та збурення, а друга $\mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-1}$ — зумовлює спотворення різницевого сигналу. Перша складова є джерелом інформації для корекції прогнозованого стану, тоді як друга ускладнює цю процедуру, спричиняючи зміщення у підсумковій оцінці. Цілком природно, що для отримання незміщених оцінок станів матриці, передачі фільтра варто відокремити вплив другої складової. Для цього введемо дві додаткові послідовності $\mathbf{r}_k^0$ і $\mathbf{r}_k^1$, пов'язані з інноваційним процесом співвідношенням

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^0 \\ \mathbf{r}_k^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_k.$$

Що дає нам можливість розділити інноваційний процес на дві складові

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^0 &= \Lambda_0\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k + \Lambda_0\mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-1}; \\ \mathbf{r}_k^1 &= \Lambda_1\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k + \Lambda_1\mathbf{J}\boldsymbol{\eta}_{k-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для розрахунку незміщених оцінок вектора станів, інваріантних до впливу несправностей та збурень, застосовується перший рядок виразу (10). Другий рядок цього виразу, у свою чергу, використовується для визначення величини відповідних несправностей або збурень. Щоб це стало можливим потрібно ввести два обмеження на матриці Λ_0 і Λ_1

$$\Lambda_0\mathbf{J} = 0; \quad \Lambda_1\mathbf{J} = \mathbf{I}.$$

У разі введення цих обмежень у рівняння (12) отримані послідовності можна записати у формі:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^0 &= \Lambda_0\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k; \\ \mathbf{r}_k^1 &= \Lambda_1\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\eta}_{k-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Послідовність $\mathbf{r}_k^0$ призначена для уточнення прогнозованих оцінок станів, а послідовність $\mathbf{r}_k^1$ використовується для визначення величини збурень чи несправностей. Підставивши співвідношення (11) у формули (8) та здійснивши необхідні перетворення, отримуємо вираз фільтра здатного

реагувати на несправності

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \left([\mathbf{K}\Psi] \begin{bmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} \right) \hat{\mathbf{y}}_k; \\ \mathbf{r}_k^1 &= \Lambda_1 \mathbf{C} \xi_k; \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C} \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k},\end{aligned}$$

де $\Psi \triangleq \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{A}\mathbf{F}_2 & \dots & \mathbf{A}^{z-1}\mathbf{F}_z \end{bmatrix}$ — характеризує траєкторії розповсюдження несправностей і збурень.

Використання додаткових позначень $\mathbf{H} = \Lambda_0 \mathbf{C}$, $\mathbf{W} = \mathbf{A} - \Psi \Lambda_1 \mathbf{H}$, за аналогією до систем безперервного часу [19], дає змогу отримати узагальнену форму фільтра Калмана, яка враховує особливості поставленої задачі.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &= [\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{H}] \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + (\mathbf{K}\Lambda_0 + \Psi\Lambda_1) \hat{\mathbf{y}}_k; \\ \mathbf{r}_k^1 &= \Lambda_1 \mathbf{C} \xi_k; \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H} \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}.\end{aligned}\tag{12}$$

Фільтр, отриманий у результаті синтезу, забезпечує інтегроване оцінювання стану системи, прогнозованих вимірювань і величин, що характеризують несправності та збурення. Ключовим питанням залишається вибір матричного коефіцієнта передачі $\mathbf{K}$. Особливих труднощів у рішенні не виникає, оскільки єдине накладене обмеження полягає у забезпеченні стійкості відповідної матриці $[\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{H}]$, що досягається розташуванням полюсів спостережності всередині одиничного кола, використовуючи відповідний математичний апарат. У детермінованому випадку (за відсутності шумів) матриця передачі стає необмеженою, що відповідає виродженому спостерігачу. У стохастичному випадку її значення визначається рівнями шумів $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$, присутніх у системі.

Аналіз стійкості та збіжності процесу оцінювання

Враховуючи той факт, що структура синтезованого фільтра подібна до структури дискретного фільтра Калмана, властивості оцінок, такі як стійкість та збіжність, розглядаються лише стисло. Ґрунтовний аналіз цієї проблематики подано у роботі [16], де доведено, що дискретний фільтр Калмана буде стійким лише тоді, коли власні значення відповідної матриці $[\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{H}]$ розташовані всередині одиничного кола; пара $[\mathbf{W}\mathbf{H}]$ є спостережуваною, а пара $[\mathbf{W}\mathbf{G}]$ — повністю керованою. З погляду загальної теорії, стійкість та збіжність процесу фільтрації, доцільно розглядати у контексті стійкості розв'язків рівнянь Ріккати для коваріаційної матриці похибок фільтрації з довільною матрицею передачі [16]

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k} (\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T.$$

Відповідно до вищезазначеного, у контексті задачі, що розглядається у цій роботі, зазначені умови трансформуються у співвідношення, що задаються ранговим критерієм Розенброка [14]

$$\left. \begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{W} & \\ \mathbf{H} & \end{pmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbf{H}, \quad |z| \geq 1, \\ \text{rank} \begin{pmatrix} -e^{j\omega} \mathbf{I} + \mathbf{W} & \mathbf{\eta}^{1/2} \end{pmatrix} = n, \quad \forall \omega \in 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{W} & \mathbf{F} \\ \mathbf{H} & 0 \end{pmatrix} = n + p, \\ \text{rank} \begin{pmatrix} -e^{j\omega} \mathbf{I} + \mathbf{W} & \mathbf{F} & \mathbf{\eta}^{1/2} \end{pmatrix} = n, \quad \forall \omega \in \mathbf{\eta}: 0 \leq \omega \leq 2\pi. \end{aligned} \right.$$

Результати чисельного моделювання

Для демонстрації роботи алгоритму використаємо лінійну дискретну динамічну систему з фіксованими параметрами, що описується рівняннями (1) за таких значень системних матриць:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,4729 & 0,5765 & 0,6260 \\ -0,1565 & -0,3096 & -0,2060 \\ 0,0515 & 0,1010 & -0,0521 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,5271 \\ 0,1565 \\ -0,0515 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 6,4737 & 2,1085 \\ 0,0493 & 0,6260 \\ -1,4661 & -0,2060 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} f_k^1 \\ f_k^2 \end{bmatrix}; \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_k^1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{s}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,008 & 0 \\ 0 & 0 & 0,008 \end{bmatrix}.$$

Компоненти вектора стану $\mathbf{s}_k$ спотворювалися білими гаусовими шумами $\mathbf{w}_k$, що вводилися для врахування похибок моделювання. Похибки вимірювань $\mathbf{v}_k$ моделювалися шляхом додавання білих гаусових шумів, некорельованих з $\mathbf{w}_k$. Інтенсивність зазначених шумів визначалася за допомогою відповідних ковариаційних матриць

$$\mathbf{Q}_k = E\{\mathbf{w} \mathbf{w}^T\} = 0,008 \cdot eye(3); \mathbf{R}_k = E\{\mathbf{v} \mathbf{v}^T\} = 0,005 \cdot eye(3) \approx.$$

Імітаційне відтворення несправностей полягало у формуванні відповідного вектора $\mathbf{f}_k$ за допомогою сигналів еквівалентних відмові сенсорної підсистеми у вигляді параметричного зсуву

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} f_k^1 \\ f_k^2 \end{bmatrix} = \begin{cases} k > 100 & f_k^1 = 0,3, \\ k > 600 & f_k^2 = 1,5. \end{cases}$$

Застосування діагностичного фільтра забезпечує одночасне оцінювання стану системи та вектора несправностей. Це дозволяє не лише підвищити точність і надійність процесу ідентифікації несправностей, але й створює передумови для реалізації адаптивних стратегій керування. Для компенсації сенсорного параметричного зсуву, на ділянці $k > 400$ застосовано корекцію у вигляді керувального сигналу $\mathbf{u}_k = [-3, 0; -3, 0; -3, 0]^T$. Процес формування сигналів несправностей, компенсаційного сигналу та результати відгуку динамічної системи на їх вплив показано на рис. 1.

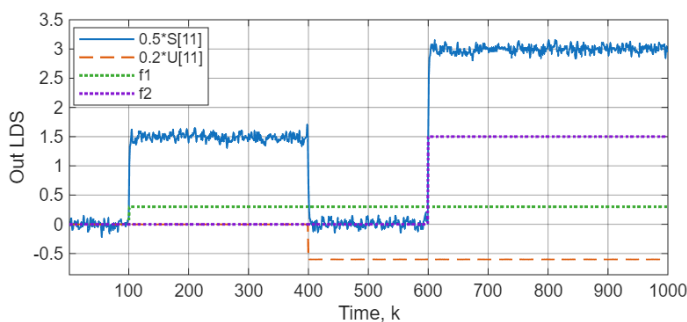


Рис. 1. Відгук компоненти $s[11]$ динамічної системи на вплив керувальних сигналів

лише тоді, коли кількість несправностей не перевищує кількість незалежних вимірювань. У протилежному випадку процедура стає нереалізованою, оскільки інформаційна надлишковість відсутня. У цьому випадку вимоги щодо кількості вимірювальних каналів та локалізованих несправностей виконуються, оскільки $rank(\mathbf{H} * \mathbf{F}) = rank(\mathbf{F}) = 3$.

2. Другим етапом є визначення показника виявлення несправностей за заданими напрямками (3). Це дозволяє кількісно оцінити здатність системи до виявлення відмов у конкретних координатах простору станів. Зміст цього показника полягає в тому, що він характеризує чутливість системи до наявності несправностей та визначає можливість їх своєчасної ідентифікації. Критерієм цього параметра служить Евклідова норма: $norm(\mathbf{J}) = (\mathbf{H} \mathbf{W}^{(i-1)} \mathbf{F}) > 10^{-6}$, $i = 1, \dots, 3$, в розглянутих умовах $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

3. На цьому етапі формувалася матриця передачі фільтра $\mathbf{K}$, що до умов спостережуваності повинна забезпечувати стійкість відповідної матриці $[\mathbf{W} - \mathbf{K} \mathbf{H}]$. Як вже зазначалося, це досягається розташуванням полюсів стійкості всередині одиничного кола (для нашого випадку $[-0,1 - 0,1 - j \cdot 0,5 - 0,1 + j \cdot 0,5]$) та використанням відповідного апарату матричної алгебри.

$$\mathbf{K} = [0,7924 - 0,2044 \, i, 1,4756; -1,6828 \, i, 0,4333 - 3,1358 \, i; 0,4950; -0,1275; 0,9223] \cdot 10^3.$$

4. Вподальшому здійснювалося обчислення матриць

$$\mathbf{J} = \mathbf{H}\mathbf{W}^{i-1}\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{I}\mathbf{F}; \quad \Lambda_1 = \mathbf{I}\mathbf{J}^\#; \quad \Psi = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{W}\mathbf{F}_2 & \dots & \mathbf{W}^Z\mathbf{F}_Z \end{bmatrix},$$

де, $\mathbf{J}^\#$ — визначалась як псевдообернена матриця Мура–Пенроуза. Матриця Λ_0 обчислювалася методом розв’язання недовизначеної системи лінійних рівнянь, що вимагає апріорного задання вільних параметрів $\Lambda_0 = [0,2299 \ -0,4451 \ 1,0; \ 0,1149 \ -0,2226 \ 0,5; \ 0,0230 \ -0,0445 \ 0,1]$. Результат обчислення інших складових

$$\mathbf{J} = [6,4737; 2,1085; 0,0493; 0,6260; -1,4661; -0,2060];$$

$$\Psi = [62,1719; 1,2289; -0,7263; -0,4814; 0,4148; 0,1826];$$

$$\Lambda_1 = [0,1082 \ -0,4365 \ -0,2191; \ 0,1221 \ 1,3788 \ 0,5857].$$

Вибір прийнятних значень цих параметрів визначається фізичною сутністю та специфікою розв’язуваної задачі.

5. З метою наочнішого відображення специфіки роботи синтезованого в роботі алгоритму фільтрації, для динамічної системи (1), сформовано алгоритм еталонного фільтра Калмана за стандартною процедурою відповідно до таких рівнянь [11]:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{Q};$$

$$\Phi_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{C}^T \left[\mathbf{C}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right]^{-1};$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = [\mathbf{I}_n - \Phi\mathbf{C}]\mathbf{P}_{k+1|k};$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_{k|k} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \Phi[\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_{k|k}].$$

Визначені у пунктах 1—5 вхідні параметри забезпечили формування початкових умов та задали необхідні обмеження для коректної роботи алгоритму, стали відправною точкою для проведення числового моделювання.

Результати моделювання роботи класичного, еталонного фільтра Калмана показано на рис. 2. Представлені дані слугують базовим орієнтиром для порівняння з результатами роботи синтезованого діагностичного фільтра, дозволяючи наочно продемонструвати його переваги та відмінності у процесі оцінювання та ізоляції несправностей.

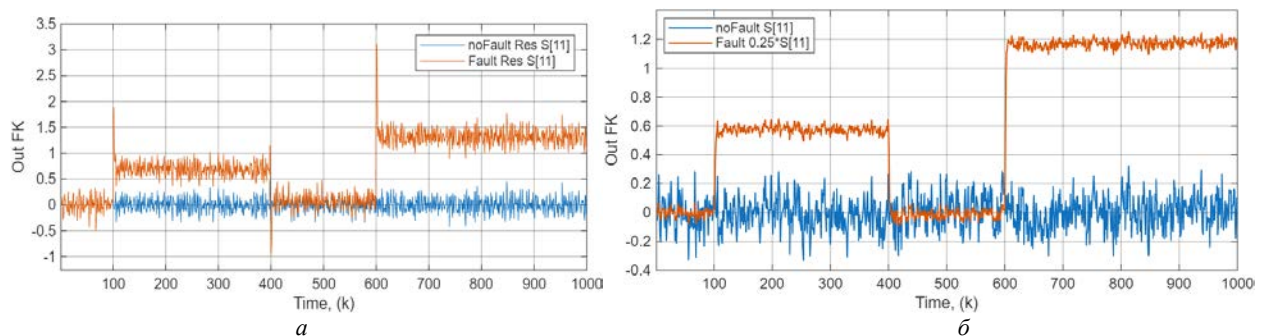


Рис. 2. Результати роботи фільтра Калмана в стандартних умовах та в умовах присутності несправностей:
а — складова вектора стану $\mathbf{s}[11]$; б — різницевий сигнал компоненти $\mathbf{s}[11]$

Для якісної оцінки, розглянутих в цій роботі алгоритмів, в числовому експерименті використовується інноваційний процес $\text{Res}\mathbf{r}_k = \mathbf{s}_{k|k} - \hat{\mathbf{s}}_k$, який є різницевим сигналом виходу лінійної динамічної системи та оцінки отриманої за допомогою відповідного фільтра. Тут він виступає своєрідним індикатором точності отриманих оцінок. Якщо фільтр адекватно реагує на зміни у динаміці об’єкта стеження то залишки є некорельованим гаусівським випадковим процесом з нульовим середнім і коваріацією, що визначає точність його оцінювання. Така властивість інноваційного процесу дозволяє застосовувати класичні методи математичної статистики не тільки для перевірки адекватності моделі та оцінки ефективності синтезованого фільтра, а і забезпечує можливість побудови об’єктивних критеріїв для реалізації порогових схем виявлення відмов та несправностей.

На рис. 2а відображено часові залежності компоненти вектору стану $\mathbf{s}[11]$, отриманих за номінальних умов та в умовах впливу несправностей для стандартного фільтра Калмана, а на рис. 2б —

відповідні різницеві сигнали, які свідчать про неспроможність цього фільтра працювати в середовищі де номінальні припущення не відповідають реальній динаміці системи. Це проявляється у відхиленнях значень залишкових сигналів, які виходять за межі статистично очікуваних результатів.

Отримані під час моделювання дані, які свідчать про коректність функціонування синтезованого діагностичного алгоритму, показано на рис. 3. Оскільки в основу синтезованого алгоритму покладено функціональні залежності оптимального фільтра Калмана отримані оцінки компонент вектора стану динамічної системи (1) зовнішнє є схожими до рис. 1а і не представлені в роботі. Натомість, в цьому випадку, інформативнішим є різницевий інноваційний процес, відображений на рис. 3а, який свідчить про цілковиту спроможність алгоритму виконувати задачі фільтрації інформаційного параметра, як в номінальних умовах, так і під впливом несправностей або відмов і демонструє здатність алгоритму відстежувати динаміку системи та своєчасно реагувати на зміни, пов'язані з їх появою. Оскільки задекларовані показники виявлення несправностей $\beta_1 = \beta_2 = 1$, фільтр реагує на несправності з затримкою в один такт, необхідний для накопичення інформації про відхилення з метою подальшої корекції оцінок. Це проявляється у вигляді шумових викидів на ділянках $k = 100$ та $k = 600$, що відбивають момент переходу системи від номінального режиму до режиму з відмовами і є індикатором активації механізму роздільного оцінювання.

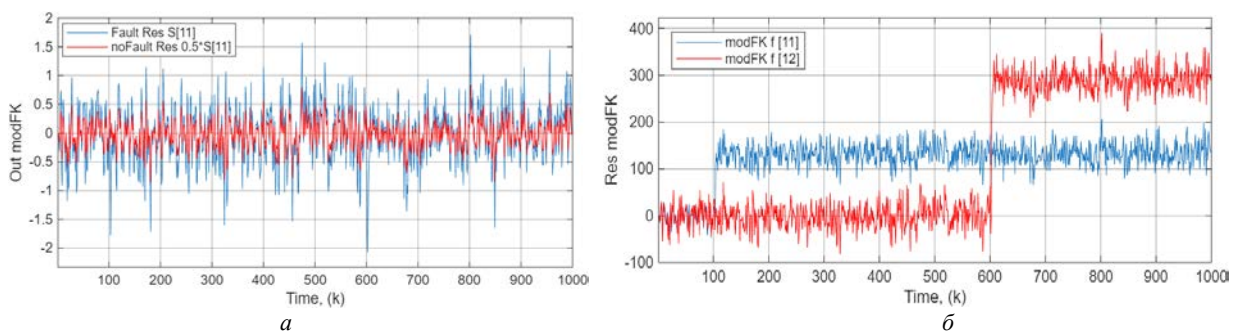


Рис. 3. Результати роботи синтезованого фільтра: а — різницевий сигнал компоненти $s[11]$ в стандартних умовах та в умовах присутності несправностей; б — роздільна оцінка несправностей, різницевий сигнал компонент $f[11]$ та $f[12]$

У випадку номінального режиму можна констатувати, що результати оцінювання еквівалентні оцінкам, наведеними для стандартного фільтра Калмана на рис. 1б.

Після появи несправностей і активації механізму роздільного оцінювання фільтр розщеплюється на дві структури, що паралельно працюють, одна з яких виконує оцінювання вектора стану, ігноруючи факт виникнення несправностей, а друга виконує функції оцінювання несправностей на основі $\mathbf{r}_k^1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{C} \xi_k + \mathbf{n}_{k-1}$. На рис. 3б показано оцінки несправностей у вигляді компонент різницевого сигналу $f[11]$ та $f[12]$. Не зважаючи на те, що за умовами тесту для $k = 400$, задля компенсації впливу першої несправності, дію $f[11]$ скореговано керувальним сигналом $\mathbf{u}_k$, її вплив на систему в цілому залишився. Задання відповідних порогових рівнів у різницевих каналах дозволяє фіксувати появу несправностей, а із заданою сигнатурою несправностей — проводити класифікацію на основі порівняння. Оскільки кожна паралельна структура має меншу розмірність порівняно з вихідною, це сприяє зменшенню обчислювальних витрат. Водночас така економія супроводжується певною втраченою точності відносно номінального режиму роботи. До того ж, розширення функціональних можливостей алгоритму потребує введення додаткових рангових обмежень.

Висновки

У роботі запропоновано спеціалізований діагностичний фільтр, синтезований для задач виявлення та локалізації несправностей, відмов і збурень у класі лінійних стаціонарних дискретних систем. Алгоритм діагностики проектувався так, щоб попередньо сформовані залишкові різниці з відповідними спрямованими властивостями (сигнатури) дозволяли відокремити ефект несправностей цільового типу від впливу несправностей або збурень інших типів. Синтез сформував структуру пристрою класу «екстраполятор–коректор», що містить два фільтра, що паралельно працюють, реалізовані у формі, алгоритмічно спорідненій з фільтром Калмана. Одна з підсистем забезпечує оцінювання вектора стану без врахування відмов, а інша, вироджена за структурою, — призначена для формування оцінки несправностей, водночас кожен елемент вектора різниць пов'язаний із заданим типом несправності. Застосування алгоритму дозволяє скоротити обчислювальні витрати, проте це

супроводжується введенням додаткових обмежень і зменшенням точності результатів оцінювання, що пов'язано з обчислювальними аспектами відносно системних псевдообернених матриць. Відомо, що таке рішення є наближеним і неоднозначним, наслідком чого є квазіоптимальність отриманої структури.

На рівні загальних стверджень, у скороченій формі обговорено питання збіжності та стійкості отриманих оцінок. Наведено результати перевірки працездатності методу на ілюстративному числовому прикладі з використанням обчислювального середовища MatLab. Аналіз отриманих результатів подано у порівнянні з можливостями стандартного фільтра Калмана, що дозволяє наочно показати ефективність розробленого підходу та його переваги у порівнянні з класичними методами оцінювання. Результати обчислювального експерименту підтвердили стійкість алгоритму в умовах наявності збурень динаміки та похибок вимірювань та загальну працездатність методу. Синтезований фільтр здатний формувати оцінки станів задовільної якості та виконувати коректну роботу з діагностики непередбачених несправностей, забезпечуючи тим самим є простоту реалізації подальших статистичних тестів для виявлення та оцінювання кількох несправностей, що можуть виникати одночасно або послідовно. На основі проведеного аналізу можна констатувати, що мета роботи досягнута, а представлена робота вносить елемент новизни у сфері виявлення та класифікації несправностей та збурень у лінійних дискретних динамічних системах структура яких апріорно не визначена.

Зауважимо, що поза полем зору цієї роботи залишилися такі важливі питання, як діагностика несправностей, що повільно зароджуються, стійкість до параметричної невизначеності об'єкта, що діагностується, діагностика несправностей у нелінійних системах і, звичайно ж, розширення сфери застосування розроблених методів. Все це може бути предметом подальших досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] E. Chow, and A. Willsky, "Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 7, pp. 603-614, 1984. <https://doi.org/10.1109/TAC.1984.1103593>.
- [2] Y. Lei, et al, "Condition monitoring and fault diagnosis of industrial robots: A review," *Sci. China Technol. Sci.* 68, 111030, 2025. <https://doi.org/10.1007/s11431-024-2810-2>.
- [3] Z. Wang, and Y. Shen, "Introduction. In: Model-Based Fault Diagnosis. Studies in Systems," *Decision and Control*, Springer, Singapore, vol. 221, 2023. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6706-1_1.
- [4] А. Ю. Воловик, і В. М. Кичак, «Теоретичні основи функціональних відновників діагностичного типу», *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 3, с. 109-118, 2018. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://visnyk.vntu.edu.ua/index.php/visnyk/issue/view/90>.
- [5] Z. Zeng, H. Zhang, and Q. Miao, "Analytical Model Based Fault Diagnosis of Complex System: A Review," *International Conference on Sensing, Measurement & Data Analytics in the era of Artificial Intelligence (ICSMD)*, pp. 1-5, 2021. <https://doi.org/10.1109/ICSMD53520.2021.9670860>.
- [6] A. Volovyk, V. Kychak, and D. Havrilov, "Discrete Kalman Filter Invariant to Perturbations," *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 18, no. 10, pp. 21-41, 2021. https://doi.org/10.12700/APH.18.10.2021.10_2.
- [7] S. Hwang, S. Y. Kim, and C. E. Seah, "A Survey of Fault Detection, Isolation, and Reconfiguration Methods," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 3, pp. 636-653, 2010. <https://doi.org/10.1109/TCST.2009.2026285>.
- [8] X. Steven, Li Linlin, and Liu Tianyu, "An alternative paradigm of fault diagnosis in dynamic systems: Orthogonal projection-based methods," *Automatica*, vol. 183, 112637, 2026. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2025.112637>.
- [9] Z. Fan, and L. Zhao, "Autonomous Integrity of Multisource Information Resilient Fusion Navigation System: State-of-the-Art and Open Challenges," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 73, Art no. 9513117, pp. 1-17, 2024. <https://doi.org/10.1109/TIM.2024.3427865>.
- [10] W. Gongbo, Z. Yongkang, M. Wei, W. Peng, Y. Ming, and Y. Shaoqiong, "Study on an on-line fault detection and diagnosis model of underwater gliders based on hidden Markov model," *Ocean Engineering*, vol 343, Part 3, 12340, 2026. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.123402>.
- [11] А. Ю. Воловик, і Д. В. Гаврілов, «Апроксимація розширеного фільтра Калмана паралельною двокаскадною структурою», *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 4 (257), с. 107-115, 2019. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2019-145-4-107-115>.
- [12] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, "Diagnosis and Fault-Tolerant Control," *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*. 2016. p. 695. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-47943-8>.
- [13] A. Varga. Solving Fault Diagnosis Problems. *Springer Cham*, 2023, p. 442. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-35767>.
- [14] J. Gertler, and R. Monajemy, "Generating directional residuals with dynamic parity relations," *Automatica*, vol. 31, iss. 4, pp. 627-635, 1995. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)98494-Q](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)98494-Q).
- [15] Z. Zhang, and X. He, "Geometric Approach Based Fault Detection and Isolation: A Review," *41st Chinese Control Conference (CCC), Hefei, China*, pp. 4136-4141, 2022. <https://doi.org/10.23919/CCC55666.2022.9901636>.
- [16] J. Keller, D. Sauter, and D. Theilliol, "Fault Isolation Filter with Decoupling Constraints Triggered Online From Structural Faults Detectability Conditions," *International Conference on Control and Fault-Tolerant Systems, Ayia Napa, Cyprus*, pp. 204-209, 2025. <https://doi.org/10.1109/SysTol66549.2025.11267349>.
- [17] Z Wang, and Y. Shen, "Fault Isolation Based on Directional Residual Generation. In: Model-Based Fault Diagnosis. Studies in Systems," *Decision and Control*, vol 221, pp 115-135, 2023. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6706-1_8.
- [18] B. Liu, and J. Si, "Fault detection and isolation for linear time-invariant systems," *Proceedings of 1994 33rd IEEE*

Conference on Decision and Control, vol. 3, pp. 3048-3053, 1994. <https://doi.org/10.1109/CDC.1994.411318>.

[19] B. Liu, and J. Si, "Fault isolation filter design for linear time-invariant systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 5, pp. 704-707, 1997. <https://doi.org/10.1109/9.580881>.

Рекомендована кафедрою інформаційних радіоелектронних технологій і систем ВНТУ

Дата надходження 22.05.2026

Дата прийняття після доопрацювання 16.12.2025

Дата прийняття до друку після рецензування 8.06.2026

Дата публікації 2.10.2026

Воловик Андрій Юрійович — д-р техн. наук, професор кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, e-mail: voland@vntu.edu.ua . <https://orcid.org/0000-0002-8772-9843>;

Савицький Антон Юрійович — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій та систем, e-mail: savitskyant@gmail.com . <https://orcid.org/0009-0000-3490-6300>.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

A. Yu. Volovyk¹

A. Yu. Savitskyi¹

Linear Dynamic Systems State Diagnosis Using Separate Evaluation Method

¹Vinnitsia National Technical University

To ensure high level of performance and operational reliability of modern, highly integrated technical systems, the timely detection and identification of malfunctions, failures, and sudden disturbances is critical. Their rapid identification makes it possible to promptly implement appropriate corrective actions, aimed at restoring system functionality and preventing the development of emergency situations. This paper addresses the problem of synthesizing a specialized filter designed to detect and localize failures, malfunctions, or disturbances in a class of linear stationary discrete-time systems. The fundamental principle of the algorithm is the concept of analytical redundancy based on a mathematical model of the system under observation. The diagnostic algorithm was designed so that pre-formed residual differences, in the form of signatures, would allow the effects of target-type faults to be distinguished from the faults or disturbances influence of other classes. This resulted in the creation of an "extrapolator-corrector" device structure containing two parallel filters implemented in a form that is algorithmically equivalent to a Kalman filter. It is noteworthy that one of the subsystems provides a fault-free state vector estimate, while the other, which has a degenerate structure, is designed to generate a fault estimate. The resulting difference vector components are uniquely associated with a given fault type. The application of this algorithm reduces computational costs but introduces additional constraints and reduces the accuracy of the estimation results, due to computational issues related to the system's pseudo-inverse matrices. Since this solution is approximate and non-unique, the resulting structure exhibits characteristics of quasi-optimality. In general terms, the convergence and stability of the obtained estimates are briefly discussed. The results of the method performance test are presented using an illustrative numerical example. The analysis of the results is presented in comparison with the abilities of the classical Kalman filter, which clearly demonstrates the effectiveness of the developed approach and its advantages. The computational experiment results confirmed the overall effectiveness of the method. The synthesized filter enables to generate state estimates of satisfactory quality and perform correctly when diagnosing unexpected malfunctions, failures, and sudden disturbances. Based on the conclusions drawn, it can be stated that this work introduces an element of scientific novelty into the field of fault detection and classification in linear discrete dynamic systems. Directions for further research have been identified.

Keywords: discrete linear dynamic system; separate evaluation method; analytical redundancy.

Volovyk Andrii Yu. — Dr. Sc. (Eng.), Professor of the Chair of Information Radioelectronic Technologies and Systems, e-mail: voland@vntu.edu.ua . <https://orcid.org/0000-0002-8772-9843>;

Savitskyi Anton Yu. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Information Radioelectronic Technologies and Systems, e-mail: savitskyant@gmail.com . <https://orcid.org/0009-0000-3490-6300>