https://doi.org/10.31649/1997-9266-2026-187-4-218-227

УДК 37.015.3:004.942:517.9

О. П. Чорний[1]
Л. В. Герасименко[1]
О. А. Чорна[1]

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ

[1]Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

Метою статті є обґрунтування підходу до нелінійного моделювання динаміки освітнього процесу як керованої системи, де результат навчання досягається під дією низки навчальних стимулів та чинників, що дестабілізують освітнє середовище (інерційності, забування, перевантаження). У дослідженні використано методи математичного та імітаційного моделювання, теорії динамічних систем, локальної лінеаризації та чисельного інтегрування диференціальних рівнянь. Запропоновано керовану нелінійну модель типу «знання–завади», у якій процес навчання описується через взаємодію двох змінних стану: нормованого рівня засвоєння навчального матеріалу та інтегрального показника інтенсивності процесів, що знижують ефективність засвоєння. Такий показник узагальнює вплив зовнішніх організаційних чинників, когнітивного перевантаження, нестійкості уваги, втоми, стресу та інших чинників, що зумовлюють нерівномірність навчальних досягнень у часі.

У роботі показано, що класична лінійна кібернетична модель другого порядку є придатною для опису інерційності, демпфування та ефективних втрат навчального процесу, проте потребує розширення для відтворення нелінійних ефектів насичення, фонових збурень і зміни режиму у разі покращення умов навчання. Для цього запропоновано узгодження нелінійної керованої моделі з кібернетичною моделлю другого порядку шляхом локальної лінеаризації в околі рівноваги. Встановлено, що параметри еквівалентного рівняння другого порядку можуть бути інтерпретовані через похідні правих частин нелінійної системи, а характер перехідних процесів визначається власними значеннями матриці Якобі.

Чисельне моделювання проведено для сценарію керованої зміни умов навчання у визначений момент часу. Результати демонструють наявність трьох характерних режимів: початкової адаптації, квазістаціонарного навчального процесу з флуктуаціями та переходу до нового робочого режиму після покращення умов. Показано, що зменшення інтенсивності дестабілізвальних чинників і підвищення ефективності навчального впливу приводять до зростання середнього рівня засвоєння та зменшення варіативності процесу. Фазова траєкторія у просторі станів запропонована як інформативний індикатор зміни режиму навчання, оскільки вона відображає не лише середній результат, а й співвідношення між досягнутим рівнем засвоєння та ресурсними витратами системи.

Наукова новизна роботи полягає в узгодженні керованої нелінійної моделі навчального процесу з кібернетичною моделлю другого порядку, що дозволяє поєднати педагогічну інтерпретацію процесів засвоєння, забування та дії завад з формальним апаратом аналізу стійкості й перехідних режимів. Запропонований підхід може бути використаний для імітаційного аналізу освітніх процесів, оцінювання впливу організаційних і методичних втручань, порівняння сценаріїв навчального навантаження, а також як теоретична основа для побудови адаптивних і персоналізованих систем навчання.

Ключові слова: динаміка навчального процесу, нелінійне моделювання, кібернетична модель другого порядку, паралельне моделювання, розподілена обробка даних, освітнє середовище.

Вступ

Процес навчання у реальних освітніх системах має виражену динамічну природу і не зводиться до монотонного «накопичення знань». На практиці він характеризується інерційністю засвоєння, насиченням результату у разі тривалого впливу, наявністю забування, а також стохастичними та детермінованими збуреннями, пов’язаними зі станом здобувача освіти та умовами організації навчання. До типових дестабілізуючих чинників належать втома, когнітивне перевантаження, інтерференція, стрес, нерівномірність режиму «заняття–перерва», контрольні впливи, а також увага й

© О. П. Чорний, Л. В. Герасименко, О. А. Чорна, 2026. Ця стаття відкритого доступу та поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution License 4.0

мотивація. Саме ці фактори формують нерівномірність у часі навчальних досягнень і зумовлюють потребу у моделях, здатних відображати взаємодію «корисного» навчального приросту з процесами, що його пригнічують або «споживають».

Класичні кібернетичні підходи часто описують навчання лінійними ланками, зокрема моделлю другого порядку, що дозволяє інтерпретувати інерцію реакції, демпфування та ефективні втрати які узагальнюють природне забування, інтерференцію та когнітивне виснаження. Проте лінійні моделі недостатньо природно відтворюють нелінійні ефекти насичення, асиметричний вплив завад на темп засвоєння та можливість істотної перебудови режиму у разі змін умов навчання. У цьому контексті модель Лотки–Вольтерри «хижак–жертва» є привабливою моделлю, оскільки прямо формалізує взаємодію двох процесів: накопичення (жертва) і пригнічення/споживання (хижак). Перенесення цієї логіки на педагогічні процеси дозволяє визначати знання як змінну стану, а завади (втома, інтерференція, стрес, фоновий шум) як активний процес, що зростає під навантаженням і спадає з відновленням.

Водночас пряма класична форма LV має обмеження для освітніх задач: відсутність природного обмеження знань, наявність автоколивань, ігнорування управління освітнім процесом та якості навчання. Тому актуальним є узгоджений перехід до керованої моделі, яка включає насичення, забування, зовнішній фон завад, стохастичні флуктуації та можливість керованого покращення умов у заданий момент часу.

Аналіз наукових публікацій

Сучасні дослідження навчання дедалі частіше трактують його як динамічний процес з нелінійними ефектами насичення, тимчасового погіршення результатів, відновлення після навантаження та часової залежності забування. Така постановка природно узгоджується з підходами теорії динамічних систем і підтримує використання керованих математичних моделей для опису еволюції рівня знань і завад у часі.

У літературі посилюється лінія робіт, де ключові характеристики навчання аналізують у термінах складних динамічних систем. Зокрема, показано, що залученість здобувача освіти формується як результат взаємодії кількох поведінкових та когнітивних показників, а мережеві та динамічні характеристики їх взаємозв'язків можуть пояснювати змінність залученості краще за ізольовані предиктори [1]. Це підкріплює доцільність розгляду навчального процесу як системи зі взаємодією змінних стану, де керовані впливи змінюють не лише середні значення, а й структуру коливань та перехідні режими.

Значна кількість праць досліджує взаємозв'язок вигорання, залученості та самооцінки ефективності, що є важливим для моделювання «завад» як узагальненого процесу втоми/стресу. На основі структурного моделювання встановлено статистично значущі зв'язки між вигоранням і залученістю та роль самоефективності як чинника, що впливає на динаміку залученості й ризик вигорання [2]. Окремі дослідження також демонструють багатоланкові медіації, у яких вигорання впливає на навчальні досягнення опосередковано через залученість та пов'язані психологічні змінні [11]. Для параметричної інтерпретації динамічних моделей це означає, що «коефіцієнти ефективності навчального впливу» та «параметри завад» можуть відповідати не одному фактору, а інтегральному психологічному ресурсу, який змінюється в часі.

Емпіричні результати щодо траєкторій когнітивної залученості та втоми у довготривалій перспективі підтверджують неоднорідність і багатокомпонентність процесу навчання. Показано, що залученість і втома можуть мати різні часові межі протягом навчального періоду, а їхня зміна пов'язана з умовами психологічної підтримки й задоволення базових потреб [3]. Це обґрунтовує необхідність моделей, у яких змінні стану мають різні сталі часу, а керований режим «покращення умов» може проявлятися у зсуві до стабільнішого режиму з меншою варіативністю.

Методично важливими є роботи, що забезпечують коректну ідентифікацію кривих навчання. Запропоновані функціональні змішані моделі дозволяють оцінювати параметри процесу з урахуванням індивідуальної варіативності, що дозволяє уточнювати параметри динамічних рівнянь з даними спостережень [4].

Окремий інтенсивний напрям становлять моделі knowledge tracing, у яких ключовим механізмом є навчання та забування. Аналіз підходів Bayesian knowledge tracing показує, що сучасні моделі дедалі частіше інтегрують часові фактори та механізми забування, поєднуючи класичні й нейромережеві методи [6]. Розвиваються також моделі, що явно розділяють процеси набуття знань і їх утримання/забування та враховують інтервали між повтореннями, контекст завдань і поточний стан

знань [5], а також моделі з явним блоком «learning and forgetting behavior», що підвищують точність прогнозу послідовностей відповідей [9]. З позицій статті ці результати прямо підтримують введення у модель окремих механізмів приросту знань, забування та завад як чинника, що модулює швидкість засвоєння.

Студіювання праць, щодо моделювання, дозволяє виділити низку робіт, спрямованих на розв'язання практичних задач оптимізації повторень та визначення оптимальних періодів чергування практичних занять. Показано, що алгоритмічний добір інтервалів повторення статистично значуще підвищує результати запам'ятовування і тим самим реалізує керування освітнім процесом через оптимізацію впливів [7]. Додатково моделі, у яких «кожна зустріч з навчальним матеріалом» впливає на навчання та забування, підкреслюють важливість дискретних подій і режимів практики для формування загальної траєкторії навчальних досягнень [8].

Розвиток цифрової освіти та дистанційних технологій підсилює роль learning analytics як емпіричного підґрунтя для калібрування та перевірки динамічних моделей. Зокрема, у віртуальних лабораторіях формуються масиви даних (логи дій, часові мітки, послідовності операцій), придатні для верифікації гіпотез щодо режимів навчання та впливу керованих умов [10]. В українському контексті обґрунтовано технологічні підходи до організації масового дистанційного навчання на базі LMS, що створює практичну можливість систематичного вимірювання навчальної динаміки [14], а також подано результати емпіричних досліджень щодо використання електронних освітніх систем, які можуть слугувати джерелом індикаторів активності та цифрових компетентностей [15]—[18]. Сукупно це підкреслює практичну доцільність моделей, які відображають не лише середній результат, а й стабільність та варіативність навчального процесу в часі.

Мета роботи — обґрунтування та побудова нелінійної динамічної моделі освітнього процесу для дослідження закономірностей взаємодії процесів засвоєння знань та зовнішніх завад методами чисельного моделювання.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

1. Удосконалити класичну модель типу «хижак–жертва» шляхом введення механізмів насичення, забування, керованого навчального впливу та інтегрального показника дестабілізуючих чинників.

2. Здійснити локальну лінеаризацію нелінійної динамічної системи в околі точки рівноваги для встановлення її структурного зв'язку з кібернетичною моделлю другого порядку та аналізу стійкості через власні значення матриці Якобі.

3. Провести чисельне моделювання перехідних процесів за умов керованої зміни параметрів навчального середовища для кількісної оцінки впливу на середній рівень засвоєння знань, стабільність процесу та еволюцію фазових траєкторій.

Результати досліджень

Процес навчання як засвоєння інформації є динамічним, інерційним і стохастично збуреним. На практиці він характеризується швидким зростанням результату на початку, уповільненням та виходом усталений процес; впливами у вигляді розсіювання уваги, зміною режиму занять, покращенням умов викладання або організації навчання; можливим переходом на якісно новий рівень.

У класичній кібернетиці навчання такі ефекти часто описують лінійною динамічною ланкою (аналог «масо-пружно-демпферної» системи), тоді як модель Лотки–Вольтерри «хижак–жертва» дає можливість опису взаємодії між накопиченням знань і факторами, що ці знання «споживають» або пригнічують (втома, інтерференція, стрес, шум середовища, перевантаження, низька якість пояснення тощо).

Використаємо рівняння у вигляді, який відповідає кібернетичній моделі 2-го порядку:

$$m\frac{d^2S(t)}{dt^2}+r\frac{dS(t)}{dt}+(\alpha-c)S(t)=H(t),$$

де $S(t)$ — потік засвоюваної інформації як функція часу t; $H(t)$ — потік вхідної навчальної інформації (подача матеріалу, навчальне навантаження); m — інерційність навчального процесу (затримка реакції, «розгін»); r — опір навчальному процесу (демпфірувальний компонент: труднощі, бар'єри, повільність перемикання, саморегуляція); α — коефіцієнт забування; c — коефіцієнт умовиводу, тобто внутрішнього «добудовування» знань на основі вже засвоєного.

Це рівняння є лінійним. Для сталого $H(t)=H_0$ воно має стаціонарний режим з рівнем

$S^* = \dfrac{H_0}{\alpha - c}$, що може давати нефізичні значення, якщо $\alpha - c$ мале, або якщо H_0 неузгоджене з масштабом S.

Перейдемо від потоку $S(t)$ до нормованого рівня засвоєного знання $x(t) \in [0;1]$.

Нехай $x(t)$ — частка засвоєного матеріалу від максимально можливого для певного освітнього компонента/модуля

$$x(t) = \frac{K(t)}{K_{\max}}, \qquad 0 \le x(t) \le 1,$$

тоді «потік засвоєння» — це $\dot{x}(t)$ швидкість приросту знань, а «подача матеріалу» — керувальний вплив $u(t)$ (аналог $H(t)$). І врахуємо, що засвоєння відбувається із забуванням і насиченням.

Класична форма для нормованого засвоєння з насиченням де: $u(t)$ — інтенсивність навчального впливу (подача, практика, повторення); λ — ефективність засвоєння (якість пояснення, здібності здобувача); μ —темп забування, що для моделі є аналогом α; $\varepsilon(t)$ — збурення (випадкові коливання уваги, настрою тощо).

Експоненційний характер забування широко відомий у психології пам'яті; сучасні реплікації класичної кривої забування (Ebbinghaus) підтверджують типову спадну динаміку утримання з часом.

Проте тут ще **немає «хижаків»**, тобто змінної, яка описує завади як активний процес.

Класична модель «жертва–хижак» (Lotka–Volterra)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy, \end{aligned} \tag{1}$$

де x — популяція жертви, y — популяція хижака.

Розглядаючи модель Лотки–Вольтерри для опису процесу навчання вважатимемо, що $x(t)$ — рівень засвоєної інформації — знання, які можуть бути використані на практиці; $y(t)$ — узагальнений рівень завад (втома, стрес, інтерференція, когнітивне перевантаження, несприятливі умови тощо). Тоді складова ax означає самопідсилення знань (чим більше знаєш, тим легше вчитися), але в реальності цей процес має певні межі; складова $-bxy$ означає суттєве зниження рівня засвоєння змісту навчання у результаті дії низки завад; складова $-cy$ означає природне відновлення (сон, відпочинок, адаптація); складова dxy означає, що завади можуть наростати разом з інтенсивністю роботи і складністю матеріалу (чим більше навантаження і значущість знань, тим більше втома/стрес).

Додатково зазначимо недоліки класичної LV-моделі у разі застосування її для опису процесу навчання. Вона не обмежує $x \le 1$; коливальні процеси не характерні для процесу навчання, а також не враховує керувальний вплив $u(t)$ і якість викладання.

Побудуємо узагальнену нелінійну модель у вигляді системи динамічних рівнянь для змінних $x(t)$ та $y(t)$, яка враховує навчання з насиченням, керуванням і урахуванням внутрішнього стану студента.

$$\dot{x} = \lambda u(t)(1-x) - \mu x - \beta x y + \sigma \xi(t), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

де $\lambda u(t)(1-x)$ — кероване засвоєння з насиченням; μx — забування (частина знань стає недоступною без повторення); βxy — «руйнівний» вплив завад на знання або на швидкість їх відтворення; $\xi(t)$ — випадковий процес (флуктуації уваги), σ — рівень неминучого шуму.

Завади опишемо як процес, який характеризується спадом у разі відновлення; наростанням у разі навантаження; наявністю базового зовнішнього фону.

Диференційне рівняння для завад буде мати вигляд:

$$\dot{y} = p(t) + \eta u(t) x - \delta y - k x y, \tag{3}$$

де $p(t) \ge 0$ — зовнішній фон завад (умови аудиторії, тривожність, організаційні негаразди); $\eta u(t) x$ — наростання втоми/перевантаження у разі активного навчання (чим інтенсивніше працює студент, тим більше втомлюється); δy — відновлення і релаксація; κxy — адаптаційний ефект (частина завад «погашається» сформованими навичками, звичкою до режиму, автоматизацією).

Узгодимо отриману модель «хижак–жертва» з моделлю другого порядку, яка має параметри «забування, умовиводу, інерції і опору». Застосуємо підхід локальної лінеаризації.

Нехай за сталих умов $u(t) = u_0$, $p(t) = p_0$ існує рівновага $\left(x^*, y^*\right)$. Розглянемо малі відхилення

$$\Delta x = x - x^*, \qquad \Delta y = y - y^*.$$

Тоді система наближено

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{J}$ — матриця Якобі.

Власні значення $\mathbf{J}$ визначають характер перехідного процесу: дійсні від'ємні — монотонний вихід на рівновагу; комплексні з від'ємною дійсною частиною — коливання, що загасають (типово для навчання з втомою); комплексні з нульовою дійсною частиною — граничний режим; комплексні з додатною дійсною частиною — розгойдування, перехід до автоколивань або розпаду (за наявності нелінійностей).

З лінеаризованої двовимірної системи можна отримати одне рівняння другого порядку для Δx, виключивши Δy. У результаті отримують рівняння

$$M\,\Delta\ddot{x} + R\Delta\dot{x} + K\,\Delta x = \Delta U,$$

яке структурно відповідає кібернетичному

$$m\ddot{S} + r\dot{S} + (\alpha - c)S = H,$$

де параметри M, R, K є функціями похідних правих частин у точці рівноваги, тобто функціями $\lambda, \mu, \beta, \eta, \delta, \kappa, u_0, p_0, x^*, y^*$. Саме в цьому сенсі можна інтерпретувати m як інерцію реакції знань на навчальний вплив; r як демпфування (опір змінам, внутрішня «в'язкість» процесу); α як частину ефективного «стягування вниз» через забування; c як частину ефективного «підсилення» через компенсацію забування.

Тобто кібернетичну модель другого порядку можна розглядати як лінійний локальний еквівалент нелінійної керованої моделі «знання–завади».

До моделі другого порядку входить коефіцієнт умовиводу c, який збільшує ефективність засвоєння λ, тобто самостійне здобуття знань у результаті прискіпливого аналізу і узагальнення; зменшує μ, адже знання стають системними, структурованими і на довше запам'ятовуються; зменшує чутливість до завад β, бо автоматизація і структурування роблять виконання менш залежним від флуктуацій стану.

Практично це реалізується так:

$$\beta = \beta_0\left(1 - k_\beta c\right), \;\; \lambda = \lambda_0\left(1 + k_c c\right), \;\; \mu = \mu_0\left(1 - k_\mu c\right),$$

де $k_c, k_\mu, k_\beta \geq 0$ — коефіцієнти впливу умовиводу на параметри.

Це дає можливість «коефіцієнти здобувача» з кібернетичної моделі врахувати в параметрах моделі «хижак–жертва».

Зазначимо, що за використання моделі «хижак–жертва» часові процеси будуть мати коливальний характер. Незважаючи, що коливання є властивістю моделі, вони мають природне підґрунтя. Коливання можуть бути стохастичними $\sigma\xi(t) \neq 0$, тобто значення уваги/втоми не може бути нульовим, або детермінованими, наприклад, ритм «заняття–перерва», контрольні, зміна активності протягом дня, записана, наприклад, у вигляді $u(t) = u_0\left[1 + a_u \sin(\omega t)\right]$, $p(t) = p_0\left[1 + a_p \sin(\omega t + \phi)\right]$, що забезпечує навіть у разі стійкої рівноваги наявність вимушених коливань.

Зазначалося, що підвищення якості процесу навчання може бути забезпечене шляхом зменшення зовнішнього фону завад $p(t)$, зменшення «ефективності хижака» β (менше руйнування знань), збільшення ефективності навчального впливу λ (краще викладання), збільшення відновлення δ (кращі перерви, режим, гігієна праці). Покращення умов навчання у моделі трактується як сукупність організаційних і методичних втручань, що зменшують дію завад та підвищують ефективність навчального

впливу. Формально це задається зменшенням параметрів, які характеризують зовнішній фон завад, втому, стрес і когнітивне перевантаження, та збільшенням параметрів, що відповідають якості пояснення, структурованості матеріалу, зворотному зв'язку й раціональному режиму навчального навантаження.

Це зручно задати як зміну параметрів у момент $t = t_0$

$$p(t) = \begin{cases} p_1, & t < t_0, \\ p_2, & t \geq t_0, \end{cases} \qquad p_2 < p_1,$$

аналогічно для β, λ, δ.

Отримані рівняння (2)—(3) дають змогу виконати моделювання процесу навчання. Для розрахунку використаємо «середні» значення коефіцієнтів кібернетичної моделі $r = 0,5$; $\alpha = 0,3$; $c = 0,25$; $m = 0,65$. Результати моделювання показані на рис. 1.

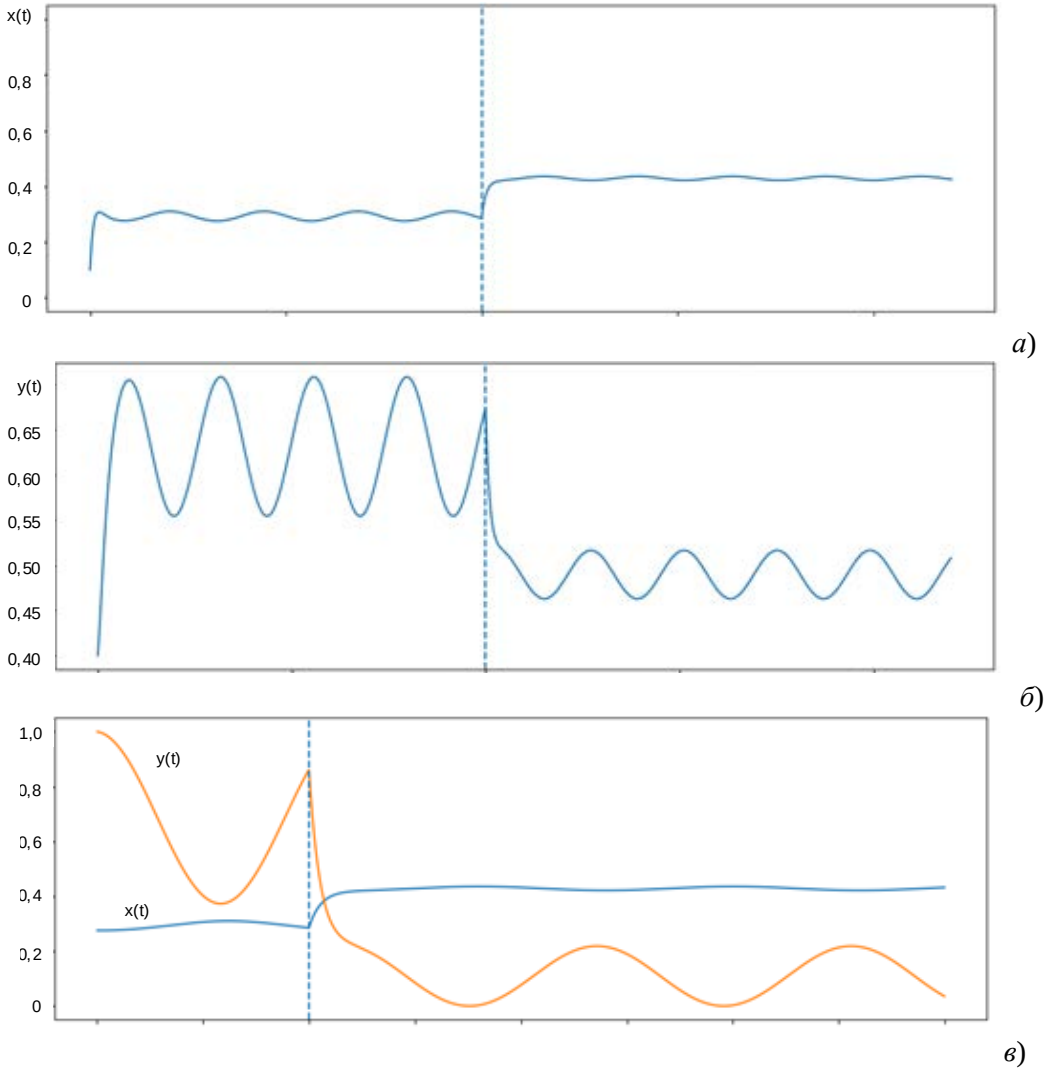

Рис. 1. Результати моделювання моделі «хижак–жертва»: *а* — динаміка нормованого рівня знань $x(t)$; *б* — динаміка інтенсивності завад $y(t)$; *в* — перехідний процес у околі t_0

У моделі (2)—(3) немає *m* та *r*, вони властиві 2-му порядку, тому зв'язок між параметрами визначимо як $\mu = \alpha = 0,3$ — швидкість забування як лінійна втрата знань, $\lambda = \lambda_0(1 + k_c c)$ з $c = 0,25$, звідки $\lambda \approx 0,91$ — це припущення для зв'язку «умовиводу» з ефективністю засвоєння. Покращення умов здійснюватимемо в момент $t_0 = 100$. Причому, до $u = 0,45$, після — $u = 0,55$. Фонові завади запишемо як $p(t) = \overline{p}(1 + \varepsilon \sin(\omega t))$, $\omega = 2\pi/24$, де до t_0 $\overline{p} = 0,18$; $\varepsilon = 0,25$, після — $\overline{p} = 0,12$; $\varepsilon = 0,18$.

Часові реалізації процесу навчання, показані на рис. 1, характеризують реакцію системи на

керовану зміну умов у момент t_0.

На рис. 1*а* показано динаміку нормованого рівня знань $x(t)$. До моменту t_0 процес виходить на квазістаціонарний режим з малими коливаннями навколо середнього значення $\overline{x}_{\text{до}} \approx 0,292$. Після покращення умов у момент t_0 відбувається перехід на вищий робочий рівень з середнім значенням $\overline{x}_{\text{після}} \approx 0,429$, що відповідає абсолютному приросту $\Delta\overline{x} = 0,137$. Одночасно зростає стабільність процесу: амплітуду коливань зменшено з $\Delta x \approx 0,034$ до $\Delta x \approx 0,014$, тобто приблизно на 58,8 %. На рис. 1*б* показано динаміку завад $y(t)$. До моменту t_0 завади утримуються на відносно високому середньому рівні $\overline{y}_{\text{до}} \approx 0,630$ із значною варіативністю на рівні $\Delta y \approx 0,152$. Після t_0 спостерігається зниження середнього рівня завад до $\overline{y}_{\text{після}} \approx 0,489$ (абсолютне зменшення 0,141, тобто близько 22,4 % від початкового рівня) та суттєве зменшення їх варіативності до $\Delta y \approx 0,053$ (скорочення приблизно на 65,1 %). При цьому коливання $y(t)$ повністю не зникають, що є очікуваним наслідком наявності квазідетермінованої складової збурень у моделі. Перехідний процес у околі t_0 (рис. 1*в*) узгоджено демонструє протилежно спрямовані зміни $x(t)$ та $y(t)$: після моменту покращення умов зростання $x(t)$ супроводжується зменшенням рівня завад, а далі система виходить на новий квазістаціонарний режим з меншою амплітудою флуктуацій обох змінних.

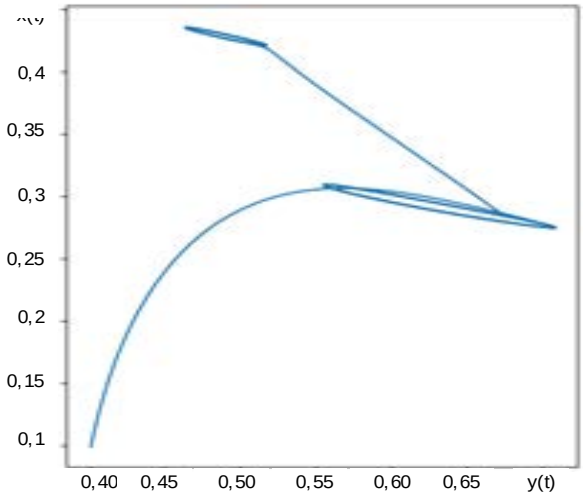

Рис. 2. Фазова траєкторія *x*(*y*) для моделі «хижак–жертва», що відображає зміну області станів системи

Фазова траєкторія $y(t)$ на рис. 2 узагальнює результати в просторі станів. До t_0 траєкторія локалізується в області нижчих значень *x* та вищих значень *y*; після t_0 вона переходить у нову область фазового простору, що відповідає вищому рівню знань за нижчого рівня завад, а також демонструє компактнішу траєкторію, тобто зменшену варіативність станів у робочому режимі. Отже, керована зміна умов у момент t_0 забезпечує одночасно підвищення середнього рівня знань і зниження середнього рівня завад, а також істотне зменшення амплітуд коливань, що кількісно підтверджує стабілізацію процесу навчання в межах взятої моделі.

Практичне використання моделі передбачає виконання не одного розрахунку, а серії багатоваріантних імітаційних експериментів для різних початкових умов, параметрів навчального середовища, рівнів педагогічного впливу, інтенсивності завад та характеристик здобувачів освіти. Тому обчислювальний процес може бути організований із залученням засобів паралельних і розподілених обчислень, оскільки значна частина модельних сценаріїв є незалежною і може реалізовуватися одночасно.

Кожний варіант імітаційного експерименту можна розглядати як окрему обчислювальну задачу, що задається відповідним набором параметрів: $\Omega_i = x_0, y_0, u(t), d(t), \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$, де x_0 і y_0 — початкові значення відповідно рівня засвоєння навчального матеріалу та інтенсивності завад; $u(t)$ — функція педагогічного впливу; $d(t)$ — зовнішнє збурення; α_i, β_i, γ_i та інші параметри характеризують індивідуальні або сценарні особливості перебігу навчального процесу.

Для кожного набору параметрів Ω_i виконується чисельне інтегрування системи рівнянь моделі, після чого визначаються узагальнені характеристики динаміки процесу: середній рівень засвоєння, амплітуда коливань, середній рівень завад, тривалість перехідного процесу та положення фазової траєкторії.

Оскільки розрахунки для різних наборів параметрів Ω_i виконуються незалежно один від одного, вони можуть бути розподілені між окремими потоками, ядрами центрального процесора, вузлами обчислювального кластера. Це дає змогу розглядати загальну задачу моделювання як сукупність незалежних підзадач, результати виконання яких надалі узагальнюються для встановлення характерних закономірностей динаміки навчального процесу.

Дані про навчальну активність здобувачів освіти можуть надходити з LMS, віртуальних лабораторій, електронних курсів, автоматизованих систем тестування та навчальних тренажерів. Такі дані мають розподілений характер і можуть містити часові мітки, результати спроб, кількість помилок, тривалість виконання завдань, частоту звернення до підказок і послідовність дій у навчальному середовищі.

Висновки

У роботі запропоновано та обґрунтовано нову нелінійну модель процесу навчання на основі моделі Лотки–Вольтерри «хижак–жертва», у якій знання $x(t)$ та узагальнені завади $y(t)$ розглядаються як взаємопов'язані змінні стану з урахуванням накопичення знань, забування та стохастичних збурень. Новизна полягає у встановленні зв'язку запропонованої нелінійної моделі з кібернетичною моделлю другого порядку шляхом локальної лінеаризації, що забезпечує можливість аналізу режимів стійкості, формалізації впливу якості навчання й організації освітнього процесу через параметри моделі.

Виконано узгодження нелінійної керованої моделі «знання–завади» з кібернетичною моделлю другого порядку шляхом локальної лінеаризації в околі рівноваги. Показано, що параметри еквівалентного рівняння другого порядку є функціями похідних правих частин у точці рівноваги, а характер перехідного процесу визначається власними значеннями матриці Якобі, що забезпечує інтерпретаційну наступність з традиційними уявленнями про інерцію, демпфування та ефективні втрати навчального процесу.

Чисельне моделювання зі зміною умов у момент t_0 кількісно підтвердило зростання середнього рівня знань після керованого «покращення умов» навчання. Причому керована зміна умов впливає не лише на середній результат, а й на стабільність навчального процесу.

Запропонована модель може бути використана як інструмент імітаційного аналізу та прогнозування динаміки навчальних досягнень за наявності втоми, стресу й інших завад, а також для кількісної оцінки ефекту організаційних і методичних втручань не лише за середнім рівнем результату, а й за його стабільністю. Практично це дає змогу обґрунтовувати режими «заняття–перерва», інтенсивність навчального навантаження, а також порівнювати альтернативні педагогічні заходи за критеріями збільшення обсягу знань і зниження завад, використовуючи параметри моделі як формалізовані показники якості освітнього процесу.

Запропонована модель також може передбачати паралельне виконання множини незалежних сценаріїв моделювання та розподілену обробку цифрових даних освітнього середовища.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] S. Li, T. Wang, J. Zheng, and S. P. Lajoie, "A complex dynamical system approach to student engagement," *Learning and Instruction*, vol. 98, Art. no. 102120, 2025. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2025.102120 .

[2] Y. Cong, L. Yang, and A. L. Proietti Ergün, "Exploring the relationship between burnout, learning engagement and academic self-efficacy among EFL learners: A structural equation modeling analysis," *Acta Psychologica*, vol. 248, Art. no. 104394, 2024. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2024.104394 .

[3] S. R. Earl, I. M. Taylor, C. Meijen, and L. Passfield, "Trajectories in cognitive engagement, fatigue, and school achievement: The role of young adolescents' psychological need satisfaction," *Learning and Individual Differences*, vol. 101, Art. no. 102248, 2023. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2022.102248 .

[4] G. Paulon, R. Reetzke, B. Chandrasekaran, and A. Sarkar, "Functional logistic mixed-effects models for learning curves from longitudinal binary data," *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*, vol. 62, no. 3, pp. 543-553, 2019. https://doi.org/10.1044/2018_JSLHR-S-ASTM-18-0283 .

[5] M. Chen, K. Bian, Y. He, Z. Li, and H. Zheng, "Enhanced learning and forgetting behavior for contextual knowledge tracing," *Information*, vol. 14, no. 3, Art. no. 168, 2023. https://doi.org/10.3390/info14030168 .

[6] I. Šarić-Grgić, A. Grubišić, and A. Gašpar, "Teacher noticing of students' mathematical thinking: The role of mathematical content knowledge and professional expertise," *Interchange*, 2023. https://doi.org/10.1007/s11257-023-09389-4 .

[7] B. Tabibian, U. Upadhyay, A. De, A. Zarezade, B. Schölkopf, and M. Gomez-Rodriguez, "Enhancing human learning via spaced repetition optimization," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2019, https://doi.org/10.1073/pnas.1815156116 .

[8] W. Ma, Z. Gao, Z. Chen, and Y. Xu, "Each encounter counts: Modeling language learning and forgetting," in *Proceedings of the ACM Conference*, 2023. https://doi.org/10.1145/3576050.3576062 .

[9] M. Chen, Q. Guan, Y. He, Z. He, L. Fang, and W. Luo, "Knowledge tracing model with learning and forgetting behavior," in *Proceedings of the ACM International Conference on Information and Knowledge Management (CIKM)*, 2022. https://doi.org/10.1145/3511808.3557622 .

[10] R. Elmoazen, et al., "Learning analytics in virtual laboratories: A systematic literature review of empirical research," *Smart Learning Environments*, vol. 10, Art. no. 23, 2023. https://doi.org/10.1186/s40561-023-00244-y .

[11] Z. Qin, et al., "The impact of academic burnout on academic achievement," Frontiers in Psychology, 2025. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2025.1559330 .

[12] E. Panadero, "A review of self-regulated learning: Six models and four directions for research," *Frontiers in Psychology*, 2017. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00422 .

[13] J. Kaplan, "Swapping learning management systems: Self-regulated learning, program completion and academic achievement," in *Lecture Notes in Computer Science. Communications in Computer and Information Science*. Cham, Switzerland: Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81350-5_6 .

[14] О. М. Спірін, і К. Р. Колос, «Технологія організації масового дистанційного навчання учнів на базі Moodle,» *Інформаційні технології і засоби навчання*, т. 79, № 5, с. 29-58, 2020. https://doi.org/10.33407/itlt.v79i5.4090 .

[15] V. M. Demianenko, "The model for adaptive learning systems of open education information environment," *Information Technologies and Learning Tools*, vol. 77, no. 3, pp. 27-38, 2020. https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3603 .

[16] N. Morze, O. Kuzminska, O. Glazunova, V. Korolchuk, M. Mokriiev, L. Varchenko-Trotsenko, and R. Zolotukha, "Moodle tools for educational analytics of the use of electronic resources of the university's portal," in *Proceedings of the 1st Symposium on Advances in Educational Technology (AET)*, vol. 2, 2022, pp. 444-451. https://doi.org/10.5220/0010932700003364 .

[17] О. М. Спірін, та ін. «Експеримент з розвитку інформаційно-дослідницької компетентності науковців і викладачів на основі відкритих електронних систем,» *Інформаційні технології і засоби навчання*, т. 80, № 6, 2020. https://doi.org/10.33407/itlt.v80i6.4201 .

[18] O. Barkovska, Y. Liapin, I. Ruban, D. Rosinskiy, and V. Tkachov, "Analysis of neural network hyperparameters for predicting user gaze direction in adaptive learning systems," *Information Technologies and Learning Tools*, vol. 108, no. 4, 2025. https://doi.org/10.33407/itlt.v108i4.6145 .

Рекомендована кафедрою автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій ВНТУ

Дата надходження 24.06.2026
Дата прийняття після доопрацювання 7.07.2026
Дата прийняття до друку після рецензування 13.07.2026
Дата публікації 2.09.2026

Чорний Олексій Петрович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри систем автоматичного управління та електроприводу, e-mail: alekseii.chornyi@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-8270-3284;

Герасименко Лариса Віталіївна — д-р пед. наук, професор, професор кафедри психології, педагогіки та філософії, e-mail: gerasimenko24@gmail.com . https://orcid.org/0000-0003-3725-8681;

Чорна Ольга Анатоліївна — канд техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки, e-mail: diolgan@gmail.com . https://orcid.org/ 0000-0002-7113-1572.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук

O. P. Chornyi[1]
L. V. Herasymenko[1]
O. A. Chorna[1]

Nonlinear Dynamic Model of the Educational Process

[1]Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

The objective of the article is to substantiate an approach to nonlinear modeling of the dynamics of the educational process as a controlled system where learning outcomes are achieved through the combined action of a set of instructional stimuli and destabilizing factors of the educational environment, such as inertia, forgetting, and overload. The study employs methods of mathematical and simulation modeling, dynamic systems theory, local linearization, and numerical integration of differential equations. The controlled nonlinear "knowledge–disturbance" model has been proposed, in which the learning process is described through the interaction of two state variables: the normalized level of learning material acquisition and an integral indicator of the process intensity that reduce the efficiency of acquisition. This indicator generalizes the influence of external organization factors, cognitive overload, instability of attention, fatigue, stress, and other factors that are the cause of the uneven academic achievements over time.

The paper shows that the classical linear second-order cybernetic model is suitable for describing inertia, damping, and effective losses in the educational process; however, it requires the extension in order to reproduce nonlinear saturation effects, background disturbances, and mode changes under improved learning conditions. For this purpose, the nonlinear controlled model is coordinated with a second-order cybernetic model by means of local linearization in the neighborhood of the equilibrium point. It is established that the parameters of the equivalent second-order equation can be interpreted through the derivatives of the right-hand sides of the nonlinear system, while the nature of transient processes is determined by the

eigenvalues of the Jacobian matrix.

Numerical modeling is carried out for a scenario involving a controlled change in learning conditions at a specified time instant. The results demonstrate the presence of three characteristic modes: initial adaptation, a quasi-stationary educational process with fluctuations, and transition to a new operating regime after the improvement of conditions. It is shown that reducing the intensity of destabilizing factors and increasing the efficiency of the instructional influence led to the increase in the average level of acquisition and decrease in process variability. The phase trajectory in the state space is proposed as an informative indicator of a change in the learning mode, since it reflects not only the average result but also the relationship between the achieved level of acquisition and the resource costs of the system.

The scientific novelty of the study lies in the coordination of a controlled nonlinear model of the learning process with a second-order cybernetic model, which makes it possible to combine the pedagogical interpretation of acquisition, forgetting, and the influence of disturbances with the formal apparatus for analyzing stability and transient modes. The proposed approach can be used for simulation analysis of educational processes, assessment of the impact of organizational and methodological interventions, comparison of learning-load scenarios, and as a theoretical basis for developing adaptive and personalized learning systems.

Keywords: dynamics of the learning process, nonlinear modeling, second-order cybernetic model, parallel modeling, distributed data processing, educational environment.

Chornyi Oleksii P. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Systems of Automatic Control and Electric Drive, e-mail: alekseii.chornyi@gmail.com . https://orcid.org/0000-0001-8270-3284;

Herasymenko Larysa V. — Dr. Sc. (Pedag.), Professor, Professor of the Chair of Psychology, Pedagogy and Philosophy, e-mail: gerasimenko24@gmail.com . https://orcid.org/0000-0003-3725-8681;

Chorna Olha A. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Computer Engineering and Electronics, e-mail: diolgan@gmail.com . https://orcid.org/0000-0002-7113-1572